

Vznik obecné teorie relativity

zpracoval: Jiří Svršek ¹

podle článku Ivana T. Todorova

Abstract

Uplynulo osm let od doby, kdy **Albert Einstein** poprvé publikoval své základní fyzikální představy o relativistické teorii gravitace, než se mu podařilo vypracovat správné matematické formulace své obecné teorie relativity. Během posledních měsíců před publikováním obecné teorie relativity na této teorii současně pracovali největší fyzik **Albert Einstein** a největší matematik **David Hilbert**.

¹e-mail: natura@baf.cz, WWW: <http://natura.baf.cz>

References

- [1] **Ivan T. Todorov: Einstein and Hilbert: The Creation of General Relativity.** Institut für Theoretische Physik, Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, D-37077 Göttingen, Germany. Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Tsarigradsko Chaussee 72, BG-1784, Sofia, Bulgaria.
arXiv:physics/0504179, 25 Apr 2005, Los Alamos National Laboratory.
<http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0504179>
- [2] **Turnbull University of St. Andrews.**
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history>
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians>
- [3] Emmy Ammalie Noether. Turnbull University of St. Andrews.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Noether_Emma.html
- [4] **Roman Ya. Kezerashvili: The Hundredth Anniversary of Einstein's Annus Mirabilis.** New York City College of Technology, The City University of New York 300 Jay Street, Brooklyn, NY 11201
arXiv:physics/0504157, April 2005. Los Alamos National Laboratory.
<http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0504157>
- [5] **Nina Byers: Women in Physics in Fermi's Time.** Department of Physics and Astronomy, University of California at Los Angeles (UCLA), Los Angeles, California 90095
arXiv:physics/0302035, v2, 17 Feb 2003.
<http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0302035>
- [6] **Einstein, Albert: Jak vidím svět.** Nakl. Lidové noviny, Jana Masaryka 56, Praha 2. Praha 1993. ISBN: 80-7106-078-X. Z něm. orig. *Mein Weltbild*. Europa Verlag A.G. Zürich.
- [7] **Colloti, Enzo: Hitler a nacismus.** Nakl. Columbus spol. s r.o., Slovinská 9, 101 00 Praha 10, Praha 1996. Z italského orig.: Hitler e il nazismo, nakl. Giunti a Casterman, 1994. Překlad z italštiny: Josef Hajný. ISBN: 80-85928-44-2.
- [8] **PHYSICS NEWS UPDATE.** The American Institute of Physics Bulletin of Physics News Number 347 November 19, 1997 by Phillip F. Schewe and Ben Stein
- [9] **Martin Šolc, Jiří Švestka, Vladimír Vanýsek: Fyzika hvězd a vesmíru.** Učebnice pro gymnázia. Státní pedagogické nakladatelství, národní podnik. Praha, 1983.

0 Úvodem

Vznik teorie supergravitace a zejména vznik teorie superstrun vedly k rozvoji nové vědy, jíž lze nazvat "matematickou fyzikou vysokých energií". Můžeme pozorovat, jak se tato věda vzdaluje od dostupných fyzikálních experimentů k matematickým modelům, které však v nejlepším případě vedou k řešení zajímavých problémů čisté matematiky. Vývoj původně grandiózního projektu "teorie všeho", za níž se teorie superstrun a M-teorie vydávají, ani po několika desítkách let nevedl k žádným konkrétním fyzikálním předpovědím, které by bylo možno experimentálně ověřit. Avšak pokusení teorie superstrun se řada matematických fyziků a matematiků jen těžko brání. **Jurij Manin** charakterizoval tuto situaci jako "extrémní romantismus teoretické fyziky vysokých energií poslední čtvrtiny 20. století".

V historii fyziky existuje skutečný příklad šťastného spojení matematiky a fyziky, které vedlo k jedné ze tří revolucí ve fyzice v první čtvrtině 20. století, ke vzniku obecné teorie relativity. Tento vývoj ukazuje, jak obtížná byla cesta autorů této teorie, kteří museli plně porozumět a použít dnes základní pojmy jako reparametrizační invariance, Bianchiho identity, koncept energie a další. Nedávné rozpory mezi historiky vědy vykonaly dobrou službu: probudily zájem širší veřejnosti o tento významný příběh historie vědy.

1 Albert Einstein a Marcel Grossmann (1907 - 1915)

Albert Einstein zřejmě nikdy nebyl spokojen s tím, čeho dosáhl. Nebyl spokojen se svou speciální teorií relativity, protože neobsahovala zrychlený pohyb a zabývala se pouze inerciálními vztažnými soustavami. Jako student příznivě přijal kritiku **Ernsta Macha** "monstrózního Newtonova pojmu absolutního prostoru".

V roce 1906 se francouzský fyzik **Henri Poincaré** ve svém zásadním článku "*Sur la dynamique de l'électron*" zmínil o problému modifikace Newtonovy gravitační teorie tak, aby byla v souladu s teorií relativity. Problém gravitace a relativity zrychleného pohybu Einsteina přivedl podle jeho vlastních slov "k nešťastnější myšlence jeho života". V roce 1907 publikoval článek "*Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*" ("O principu relativity a jeho důsledcích") v časopisu *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 4 (1907)*. Tento článek Einstein napsal na žádost **Johannese Starka**, který se později během nacistické vlády v Německu stal úhlavním nepřítelem teorie relativity. Einstein v článku uvedl, že "pro pozorovatele volně padajícího ze střechy neexistuje přinejmenším v jeho bezprostředním okolí žádné gravitační pole". Ve své přednášce v japonském Kyoto se Einstein zmínil o tom, jak ho ještě v patentovém úřadě v Bernu napadlo, že pokud člověk padá volně, necítí svojí váhu.

Proto princip ekvivalence Einstein vyslovil již dva roky po zformulování speciální teorie relativity. Jeho článek z roku 1907 však tímto principem nekončil. Článek obsahuje odvození gravitačního rudého posuvu ve spektru. Einstein odvodil vztah

$$c(\phi) = c \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right)$$

pro rychlost světla ve směru ξ konstantního gravitačního pole (hmotnost v gravitačním potenciálu ϕ byla ztotožněna s jednotkovou hmotností, aby výraz ϕ/c^2 byl bezrozměrný). Einstein tvrdil, že paprsky světla, které se nepohybují ve směru ξ , se v gravitačním poli ohýbají. Tento závěr ještě nebyl dostatečný pro zformulování relativistické gravitace. Einstein napsal svému příteli **Konradu Habichtovi** o vánocích 1907, že doufá v objasnění dosud nevysvětlených sekulárních změn délky

perihélia Merkuru.

Všechny tři pozorovatelné důsledky obecné teorie relativity tedy Einstein uvažoval již v počátcích svých úvah o obecné teorii relativity. Einsteinův génius se projevil jak svými schopnostmi tak svými mezemi. Tyto své meze **Albert Einstein** sám popsal v článku *"Autobiographische Skizze"* v březnu 1955, měsíc před svou smrtí, když se zmínil o své nedůvěře k pokročilé matematice v době svého studia. **Maurice Solovín**, Einsteinův blízký přítel během období před dokončením polytechniky ETH (*Eidgenössische Technische Hochschule*) v Zürichu, vzpomínal, že Einstein se často stavěl proti nadměrnému použití matematiky ve fyzice. Fyzika podle jeho názoru by měla být konkrétní a intuitivní věda. Matematice příliš nedůvěřoval. V roce 1907 se **Albert Einstein** pokoušel vypracovat obecnou kovariantní teorii, avšak zřejmě nevěděl, že taková teorie vznikla již v 19. století jako Riemannova geometrie. Lokální princip ekvivalence se pro Einsteina stal nástrojem, jak nehomogenní gravitační pole ztotožnit s křivostí prostoročasu. Dodnes i matematicky nadaní studenti teorie relativity mají problémy vysvětlit, co "princip ekvivalence" znamená. Intenzita gravitačního pole se projevuje nenulovým tensorem křivosti. Tuto křivost nelze odstranit ani lokální transformací souřadnic, a to bez ohledu na zvolené zrychlení.

O vánocích roku 1907 **Albert Einstein** již znal všechny fyzikální důsledky své budoucí teorie gravitace. Trvalo mu dalších 8 let, než s pomocí matematiků dosáhl matematicky správné formulace obecné teorie relativity. Od roku 1908 do poloviny roku 1911 se zabýval zejména kvantovou teorií. Studoval světelná kvanta (fotony) a záření dokonale černého tělesa. V roce 1910 dokončil svůj článek o kritické opalescenci, který se stal jeho největší prací v klasické statistické fyzice. Einstein se zabýval kvantovou teorií ještě předtím, než v roce 1913 **Niels Bohr** publikoval svůj článek a tím kvantovou teorii zpopularizoval. **Robert Millikan**, který 10 let testoval předpovědi Einsteinovy teorie fotoelektrického jevu, v roce 1915 napsal, že Einsteinova fotoelektrická rovnice v každém případě přesně předpovídala pozorovatelné důsledky. Z dnešního historického pohledu byl **Albert Einstein** skutečným průkopníkem kvantové mechaniky.

V červnu 1911, poté, co strávil čtyři měsíce v Praze, se znovu začal zabývat obecnou teorií relativity a ohybem světla. Dalšího významného průlomu dosáhl v srpnu 1912, když se vrátil do Zürichu a požádal svého přítele **Marcela Grossmanna** o pomoc s matematikou. **Marcel Grossmann** byl od roku 1907 profesorem geometrie v ETH. Jak vyplývá z jeho korespondence, Einstein byl tehdy přesvědčen, že gravitační pole nelze popsat jednoduchým skalárním polem, ale symetrickým tensorovým metrickým polem $g_{\mu\nu}(x)$, které má 10 nezávislých komponent. **Marcel Grossmann** brzy zjistil, že obecný kovariantní mechanismus, který Einstein hledal pro ekvivalenci libovolných pohybujících se soustav souřadnic, poskytuje Riemannova geometrie. Avšak v té době Einstein stál na začátku náročné práce. Odmítl dále diskutovat o kvantové mechanice. 29. října 1912 napsal **Arnoldu Sommerfeldovi**, že ke kvantové mechanice již nemá co nového říci. Začal se výlučně zabývat problémem gravitace a doufal, že se mu podaří překonat všechny potíže s pomocí svých přátel matematiků. V porovnání s tímto problémem mu speciální teorie relativity připadala jako dětská hra.

V následujících měsících se Einstein stále ještě řídil více svojí fyzikální intuicí než matematickými důkazy. Einstein a Grossmann publikovali v roce 1913 svoji první společnou práci pod názvem *"Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von Albert Einstein. II. Mathematischer Teil von Marcel Grossmann"*. Grossmann ve své matematické části poznamenal, že Ricciův tensor $R_{\mu\nu}$ lze použít pro formulaci obecně kovariantní teorie gravitace a tím učinil zásadní krok k definitivní formulaci základní rovnice obecné teorie relativity. Avšak společně pak autoři tuto možnost odmítli, protože porušovala fyzikální předpoklady. Rozhodující chybu udělal Einstein svým "požadavkem kauzality". Metrický tensor $g_{\mu\nu}$ měl být úplně určen tensorem hybnosti a energie $T_{\mu\nu}$. Tento požadavek však nemohl vést ke

správným rovnicím obecné teorie relativity

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1)$$

které jako první publikoval **David Hilbert** ve svém článku 20. listopadu 1915. Einsteinův tensor $G_{\mu\nu}$ splňuje Bianchiho identity

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

v souladu s kovariantním zákonem zachování energie-hybnosti. Proto pouze šest z deseti komponent je nezávislých a metrický tensor $g_{\mu\nu}$ není určen jednoznačně, protože závisí na čtyřech libovolných funkcích. Dnes již víme, co to znamená. Obecná kovariance znamená, že výběr souřadnic je konvencí, která nesmí ovlivňovat fyzikální zákony. Metrický tensor $g_{\mu\nu}$ podobně jako elektromagnetický vektorový potenciál \mathbf{A} , pro který platí $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, není pozorovatelnou veličinou. Pro jeho úplné určení je třeba čtyř "souřadnicových podmínek" odpovídajících kalibračním podmínkám v elektrodynamice. Bylo by ovšem příliš snadné kritizovat Einsteina na základě současných znalostí. Zmínka o kalibrační invarianci (*Eichinvarianz*) se poprvé objevila o šest let později v práci **Hermannu Weyla** "*Gravitation und Elektrizität*", v níž autor popsal hypotetickou dilatační symetrii jako jeden z prvních pokusů o sjednocenou teorii pole. Díky **Hermannu Weylovi** později vznikla Maxwellova-Diracova elektrodynamika. V letech 1912 až 1915 však **Albert Einstein** procházel zcela neznámou oblastí fyziky.

Albert Einstein a **Marcel Grossmann** ustoupili od obecné kovariance a sestavili soustavu ne zcela geometrických rovnic, které byly invariantní při lineární transformaci souřadnic. Einstein nebyl s tímto výsledkem spokojen. V srpnu 1913 napsal **Hendriku Lorentzovi**, že gravitační rovnice bohužel nemají vlastnosti obecné kovariance. Avšak celá jeho víra v tuto teorii spočívá na přesvědčení, že zrychlení soustavy souřadnic odpovídá gravitačnímu poli. Pokud všechny rovnice této teorie vyžadují transformace, které nejsou lineární, pak tato teorie je v rozporu s počátečními předpoklady.

Počátkem roku 1914 **Albert Einstein** a **Adriaan Focker**, který získal doktorát Ph.D. u **Hendrika Lorentze**, obnovili obecnou kovarianci, avšak za značnou cenu. Odvodili skalární rovnici

$$R = -\kappa T \quad R = R^\nu{}_\nu \quad T = T^\nu{}_\nu$$

za předpokladu, že metrika je konformně plochá

$$g_{\mu\nu} = \psi^2 \eta_{\mu\nu}$$

a tím se v podstatě vrátili ke skalární teorii gravitace. V říjnu 1914 **Albert Einstein** dokončil svoji 56 stran dlouhou práci "*Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*", v níž se vrátil k původní Einsteinově a Grossmannově teorii. Einsteinovy schopnosti však nespočívali v matematickém formalismu. Jeho úsilí o vlastnost kovariance rovnic pole kritizoval **Levi-Civita**, avšak překvapilo znalce geometrie. Na počátku roku 1915 se přestal zabývat obecnou teorií relativity a začal se věnovat experimentální práci s dánským fyzikem **Wanderem de Haasem**. Společně objevili nový jev, kroutivou sílu kovového válce v důsledku narušení magnetizace.

2 Einstein v Berlíně a v Göttingenu (1915 -)

David Hilbert byl bezesporu jedním z největších matematiků 20. století. Jeho práce v geometrii měla na tento obor největší vliv od dob Euklida. V roce 1899 publikoval práci "*Grundlagen der Geometrie*", v níž definoval geometrii na formálním axiomatickém základě. Kniha měla zásadní vliv na axiomatizaci matematiky. Dvacet tři Hilbertových problémů se stalo výzvou (a některé dosud

jsou) k řešení fundamentálních otázek matematiky. Podnětem byla strhující Hilbertova přednáška "Problémy matematiky" na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900. Hilbert byl přesvědčen, že každý vědecký problém lze vyřešit.

V roce 1912 po dokončení své knihy o lineárních integrálních rovnicích položil základy matematické fyziky. Byl přesvědčen, že fyzikální problémy lze řešit podobným způsobem, jako matematické problémy. Pokusil se axiomatickým přístupem sjednotit novou elektromagnetickou teorii elektronu, jíž v roce 1912 vypracoval **Gustav Mie** (1869 - 1957), s Einsteinovou a Grossmannovou teorií, kterou její autoři publikovali v roce 1913 v Göttingenu. **David Hilbert** několikrát **Alberta Einsteina** navštívil.

Koncem června a počátkem července 1915 **Albert Einstein** strávil týden v Göttingenu, kde přednesl šest dvouhodinových přednášek. Podařilo se mu plně zaujmout **Felixe Kleina** a **Davida Hilberta**. **David Hilbert** doporučil, aby Einsteinovi byla udělena třetí Bolyaiova cena v roce 1915 za jeho "hlubokého matematického ducha v jeho výsledcích". První z těchto cen dostal **Henri Poincaré** a druhou dostal **David Hilbert**. Vzájemné diskuse s Hilbertem a dalšími matematiky v Göttingenu zřejmě posílili Einsteinovu nespokojenost s neexistencí obecné kovariance jeho a Grassmannových rovnic. V červenci 1915 napsal **Sommerfeldovi**, že své články o obecné relativitě nezahrne do nového vydání knihy "*The Principle of Relativity*", protože výsledky ještě nejsou úplné. V listopadu 1915 se v dopisech přátelům vyjádřil přesněji. Omezená kovariance nezahrnovala stejnoměrné rotace. Precese perihélia planety Merkur vycházela 18" místo pozorovaných 45" za století. Důkaz z října 1914 o jednoznačnosti gravitačního hamiltoniánu nebyl správný.

Zřejmě v říjnu 1915 Einstein obdržel dopis od Sommerfelda. **Arnold Sommerfeld** v dopise uvedl, že Einstein není jediným, kdo není s teorií relativity z roku 1914 spokojen. **David Hilbert** měl také své námitky a pracoval na své vlastní práci "*Die Grundlagen der Physik*" ("Základy fyziky"), původně pod názvem "*Die Grundgleichungen der Physik*" ("Základní rovnice fyziky"). **Albert Einstein** však nechtěl neponchat plody své náročné práce a hlubokých myšlenek někomu jinému. V listopadu 1915 vynaložil veškeré úsilí na nalezení správných rovnic.

Pruské akademii věd *Preussische Akademie der Wissenschaften* zaslal čtyři zprávy 4., 11., 18. a 25. listopadu 1915. V první zprávě "*Zur allgemeine Relativitätstheorie*" odmítl svoji formulaci z roku 1914 a navrhl nové základní rovnice. Ve druhé zprávě se stejným názvem odmítl předchozí rovnice a zaslal nové. V poslední zprávě "*Die Feldgleichungen der Gravitation*" odmítl všechny předchozí výsledky a publikoval poslední verzi svých gravitačních rovnic.

28. listopadu 1915 zaslal **Arnoldu Sommerfeldovi** krátký dopis, v němž se omluvil a poděkoval za zajímavý a přátelský dopis. Uvedl, že poslední měsíc byl pro něj velmi vyčerpávající a že se nemůže soustředit na psaní. Od konce října až do konce listopadu **Albert Einstein** skutečně neodpovídal na žádné dopisy svých kolegů. Dopisoval si prostřednictvím pohlednic pouze s **Davidem Hilbertem**. Zachovaly se čtyři Einsteinovy dopisy (nebo spíše pohlednice) ze 7., 12., 15. a 18. listopadu 1915 a dvě ze čtyř Hilbertových odpovědí.

7. listopadu 1915 Einstein zaslal Hilbertovi důkazy ke svému prvnímu listopadovému článku. V dopise napsal, že jeho dřívější metoda důkazů byla chybná. V závěru uvedl, že je zvědav, zda Hilbert bude novému řešení nakloněn.

David Hilbert mohl být novému řešení velice nakloněn, protože sám předpokládal, že determinant metrického tensoru je konstantní (roven -1) a proto není obecně kovariantní. Zřejmě na základě Hilbertovy kritiky, která se nezachovala, **Albert Einstein** 11. listopadu 1915 znovu dospěl

k obecně kovariantní rovnici

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2)$$

jíž o dva roky dříve společně s Grossmannem odmítl. Tato rovnice je však splněna pouze tehdy, pokud tensor $T_{\mu\nu}$ má nulovou stopu (součet prvků na hlavní diagonále). Tak tomu je v případě Maxwellovy elektrodynamiky a Einstein uvažoval, zda by nemohla být obecnější.

12. listopadu 1915 Einstein zaslal Hilbertovi další dopis, v němž mu oznamoval nalezení obecně kovariantních rovnic pole. Poděkoval také Hilbertovi za jeho "přátelský" dopis. **David Hilbert** odpověděl Einsteinovi 14. listopadu 1915 dlouhou zprávou na dvou pohlednicích. Byl vzrušen svým vlastním "axiomatickým řešením Einsteinova velkého problému" a dodal, že jeho vlastní teorie je "zcela odlišná" od Einsteinovy. Pozval Einsteina do Göttingenu, aby si poslechl jeho přednášku na toto téma. Tón dopisu byl velmi srdečný. Hilbert pozval Einsteina, aby přijel do Göttingenu den před přednáškou a strávil noc v Hilbertově domě. V pondělí 15. listopadu 1915 Einstein již odpověděl na Hilbertovy dopisy. Můžeme být překvapeni, jak poštovní služby v Německu spolehlivě fungovaly dokonce během války. V odpovědi Einstein uvedl, že lze očekávat velké překvapení. Současně se však omluvil, že nebude schopen přednášku navštívit kvůli své únavě a bolestem žaludku. Požádal o kopii Hilbertova článku s důkazy. Zřejmě tuto kopii obdržel do tří dnů, protože 18. listopadu 1915 Einstein napsal svoji čtvrtou pohlednici. Einstein ve zprávě uvedl, že Hilbertova soustava rovnic je přesně v souladu s těmi, které Einstein nalezl před několika týdny a zaslal je Pruské akademii věd. Einstein dále uvedl, že rovnicí (2) znal již tři roky, avšak společně s Grossmannem ji odmítl, protože v newtonovské limitě nebyla v souladu s Poissonovými rovnicemi pole. Konečně Einstein informoval Hilberta o tom, že se mu podařilo vysvětlit stáčení perihélia planety Merkur pomocí obecné teorie relativity, aniž potřeboval nějaké dodatečné hypotézy.

K tomu je třeba uvést dvě důležité poznámky. Za první, není pravda, že Hilbertova rovnice (1) odpovídá Einsteinově rovnici (2), již Einstein zaslal Pruské akademii věd 11. listopadu 1915. Obě rovnice jsou navzájem konsistentní pouze pro $T = T^\nu_\nu = 0$, tedy v případě, o který se tehdy Einstein zajímal nejvíce.

Za druhé, Einstein odvodil správnou hodnotu stáčení perihélia planety Merkur ve své třetí zprávě Pruské akademii věd "*Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*" ze své nikoliv zcela správné rovnice. To bylo možné díky tomu, že řešil homogenní rovnici ($T_{\mu\nu} = 0$) v postnewtonovské aproximaci (umožňující bodové singularity). Ve světle fyzikálních důsledků této teorie Einstein neměl žádnou konkurenci.

V pátek 19. listopadu 1915 **David Hilbert** Einsteinovi blahopřál k vyřešení problému perihélia planety Merkur a humorně uvedl: "*Kdybych počítal tak rychle jako vy, pak by elektron kapituloval před mými rovnicemi a atom vodíku by mi nabídl omluvu za to, že nevyzařuje.*"

20. listopadu 1915 **David Hilbert** představil svoji práci v Královské společnosti věd v Göttingenu *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Odvodil *správné* rovnice z variačního principu za předpokladu obecné kovariance (dnes bychom řekli reparametrizační invariance) a rovnicí druhého řádu pro metrický tensor $g_{\mu\nu}$. Přiznal plné zásluhy Einsteinovi za jeho myšlenky. V publikované verzi se **David Hilbert** plně odkázal na všechny Einsteinovy články z listopadu 1915. Na přednášce 25. listopadu 1915 uvedl, že jeho diferenciální rovnice jsou v souladu s teorií, již navrhl **Albert Einstein**.

25. listopadu 1915 **Albert Einstein** navrhl *bez odvození* rovnicí

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (3)$$

Tato rovnice je plně ekvivalentní s Hilbertovou rovnicí (1), protože z obou rovnic plyne

$$R + \kappa T = 0$$

Ve svém publikovaném článku se však o přínosu **David Hilberta** nezmínil. Pozdější komentátoři věnovali mnoho času, aby vysvětlili, co vedlo **Alberta Einsteina** do své rovnice zahrnout člen s nulovou stopou. Pouze **Norton** ve své práci na základě podrobného studia včetně Einsteinových poznámek ukázal, jak **Albert Einstein** svou vlastní nezávislou cestou dospěl ke správným rovnicím.

Samozřejmě dnešní studenti obecné teorie relativity by snadno člen $-\frac{1}{2}R$ nebo ekvivalentně člen $-\frac{1}{2}T$ našli použitím *Bianchiho identity*. **Albert Einstein** ani **David Hilbert** však Bianchiho identity nemohli znát. Hilbert odvodil čtyři identity mezi poli ve své teorii jako zvláštní případ *věty Noetherové*, avšak nesprávně se domníval, že mu tyto identity umožní vyjádřit elektromagnetický vektorový potenciál pomocí výrazů gravitačního pole. Tuto chybu odstranil v další verzi svého článku.

Felix Klein v roce 1918 redukoval nulovou kovariantní divergenci

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\nu} = 0$$

také na větu Noetherové. Nejistil, že nulovost kovariantní divergence je důsledkem Bianchiho identity pro Riemannův tenzor křivosti. "Bianchiho identity" znal již **Aurel Voss** v roce 1880 a **Georgorio Ricci-Curbastro** v roce 1889. **Luigi Bianci**, který byl mimochodem žákem **Felixe Kleina**, tyto identity znovu objevil v roce 1902.

3 Rozpory mezi historiky vědy

Kronika posledního měsíce vzniku obecné teorie relativity ukazuje, že vzájemné soupeření **Alberta Einsteina** a **David Hilberta** nebylo nepřátelské (na rozdíl od **Isaaca Newtona** a **Wilhelma Leibnize**). Je třeba ocenit, že soupeření Hilberta a Einsteina v listopadu 1915 nepřerostlo ve veřejný spor. Samozřejmě, že listopadové události nepříznivě ovlivnily jejich vzájemné vztahy. 20. prosince 1915 **Albert Einstein Davidu Hilbertovi** napsal: *"Chci využít příležitosti abych vám řekl něco, co je pro mne důležité. Mezi námi došlo k určitému ochlazení, jehož příčiny nechci analyzovat. Bojoval jsem s určitou nelibostí, buďte ujistěn, že s naprostým úspěchem. Smýšlím o vás znovu s bezproblémovým přátelstvím a chci vás požádat, abyste se pokusil o mne smýšlet stejným způsobem. Je opravdu ostudné, když dva takoví přátelé zwei wirkliche Kerle, jejichž práce oba povznesla nad tento darebný svět, se navzájem nepotěší."*

Ve své klíčové článku *"Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie"* publikovaném 20. března 1916 v časopisu *"Annalen der Physik 49"* se **Albert Einstein** již odkazoval na **David Hilberta**. V květnu 1916 vedl koloquium v Berlíně o Hilbertově článku. Z tohoto důvodu znovu požádal Hilberta, aby mu svoji práci vysvětlil. Hilbertovo uznání Einsteina bylo nepochybné. Jeho životopisec Hilbertovi připisuje následující slova: *"Každý chlapec v ulicích Göttingenu rozumí čtyřrozměrné geometrii lépe než Einstein. Avšak, Einstein udělal rozhodující práci, nikoliv matematikové."*

Celý příběh však v tomto místě neskončil. Pokračoval v další generaci Einsteinových životopisců a studentů historie vědy. V roce 1997 se objevil překvapivý dodatek k existujícím Einsteinovým životopisům. Při hodnocení závěrečné fáze na obecné teorii relativity je citován Einsteinův dopis **Heinrichu Zangerrovi**, v němž se uvádí: *"Pouze jediný kolega tomu skutečně rozumí a nyní se*

pokouší to dovedně dokázat”. Již víme, že tímto kolegou nebyl nikdo jiný, než **David Hilbert**. **Fölsing** na základě dostupných důkazů odmítl obvinění, že **Albert Einstein** opsal klíčové rovnice od **David Hilberta**.

Klíčová Einsteinova práce o teorii relativity byla dokončena 25. listopadu 1915 a publikována byla 2. prosince 1915. Práce **David Hilberta**, která byla publikována 31. března 1916 a obsahovala téměř identické rovnice, byla dokončena již 20. listopadu 1915, tedy pět dní před dokončením práce **Albertem Einsteinem**. Proto z toho někteří historikové vědy vyvozovali, že Einstein tyto rovnice opsal od Hilberta. Nový výzkum však dokázal, že tato hypotéza není pravdivá. Je totiž prokázáno, že původní Hilbertova práce neobsahovala podstatné rovnice, které **David Hilbert** do práce doplnil až 20. listopadu 1915, když prostudoval Einsteinův rukopis. (*Science*, 14 November 1997.) [8]

Přesto v roce 2005 byla publikována kniha *”Zwei wirkliche Kerle”*. *Neues zur Entdeckung der Gravitationsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Albert Einstein und David Hilbert* (*Termessos Verlag, Göttingen 2005*), jejíž autorkou je **Daniela Wuensch**. Kniha byla v německém tisku inzerována titulkem *”Ein Kriminalfall in der Wissenschaftsgeschichte?”* (Kriminální případ v historii vědy?). Autorka již v úvodu knihy tvrdí, že existující fragment Hilbertovy korektury, který se vši pravděpodobností obsahoval správné rovnice pole, byl později úmyslně odstraněn a tím byla zfalšována historická pravda.

Z korespondence z listopadu 1915 a z nedávno objevených dopisů **Maxe Borna Davidu Hilbertovi** jasně vyplývá, že **David Hilbert** měl na přijetí obecné kovariance **Albertem Einsteinem** zásadní vliv. Analýza a nové důkazy však na druhé straně také ukazují, že **David Hilbert** se v době před dokončením obecné teorie relativity vydal jiným směrem. Po formulaci obecné kovariance ve svém původním textu kritizoval Einsteinův dlouho prosazovaný ”princip kauzality” a omezil obecnou kovarianci na nekovariantní formulaci zákona zachování energie a hybnosti. Teprve ve své korektuře **David Hilbert** odstranil všechny nadbytečné podmínky a rozpoznal fyzikální význam kovariantní rovnice (1).

David Hilbert a **Albert Einstein** měly morální sílu a rozum po měsících intenzivního soutěžení, z něhož vítězně vyšla především moderní fyzika, aby se vyhnuli sporu o prvenství (jemuž se nevyhnuli **Isaac Newton** a **Wilhelm Leibniz**). Bylo by ostudné pro další generace vědců a historiků vědy se pokoušet tento spor rozvířít.

4 Albert Einstein

(narozen: 14. března 1879 v Ulmu, Württemberg, Německo)
(zemřel: 18. dubna 1955 v Princetonu, New Jersey, USA)

Albert Einstein významně přispěl k zásadní změně pohledu na fyzikální realitu. Jeho teorie relativity znamenala zvrát ve fyzice a patří k vrcholům intelektuálního umění.

V roce 1886 Albert Einstein navštěvoval školu v Mnichově. Od 6 do 13 let se učil hrát na housle a získal také náboženské židovské vzdělání. O dva roky později začal studovat na gymnáziu Luitpold. Od roku 1891 se věnoval studiu matematiky.

V roce 1894 se Einsteinova rodina přestěhovala do Milána, avšak Einstein zůstal v Mnichově. V roce 1895 se neúspěšně pokusil o přijetí na *Eidgenössische Technische Hochschule, ETH* v Zürichu, aby zde získal diplom inženýra elektrotechniky. V roce 1896 odmítl německé občanství a v roce

1899 požádal o švýcarské občanství, které mu bylo uděleno v roce 1901.

Po neúspěšném pokusu o studium na ETH v Zürichu navštěvoval střední školu v Aarau. Chtěl se znovu touto cestou pokusit o studium na ETH. V Aarau napsal článek, v němž popsal své plány do budoucna. Napsal, že by chtěl studovat matematiku a fyziku a stát se učitelem přírodních věd, zejména teoretické části, protože má předpoklady pro abstraktní matematické myšlení, představivost a praktické schopnosti.

Einsteinovým přítelem na ETH byl **Marcel Grossmann**. Einstein se pokusil získat místo na této škole a napsal proto **Adolfu Hurwitzovi**. Tři z Einsteinových kolegů včetně Grossmanna získali asistentská místa na ETH. Avšak ještě v roce 1901 se Einstein snažil bez úspěchu získat místo na některé univerzitě.

Vojenské službě ve švýcarské armádě se vyhnul kvůli plochým nohám a křečovým žilám. V průběhu roku 1901 získal dočasně místo učitele matematiky na Technické vyšší škole ve Winterthuru.

Další dočasné místo získal na soukromé škole v Schaffhausenu. Grossmannův otec se pokusil Einsteinovi pomoci a doporučil ho řediteli patentového úřadu v Bernu, kde Einstein získal místo technického poradce třetí třídy.

Einstein pracoval v patentovém úřadě v letech 1902 až 1903. V roce 1904 dostal toto místo natrvalo a v roce 1906 byl povýšen na technického poradce druhé třídy. Během práce v patentovém úřadě se zabýval ve svém volném čase teoretickou fyzikou, aniž měl těsnější kontakty s odbornou literaturou nebo se svými kolegy.

V roce 1905 získal doktorát na Univerzitě v Zürichu za svoji práci "O novém určování rozměrů molekul".

V prvním ze svých tří článků napsaných v roce 1905 Einstein studoval jev objevený **Maxem Planckem**, podle něhož záření objektů probíhá po diskretních kvantech. Energie těchto kvant je přímo úměrná frekvenci záření. To se zdálo být v rozporu s teorií elektromagnetického pole, založené na Maxwellových rovnicích a se zákony termodynamiky, podle nichž se elektromagnetická energie přenáší pomocí vln. Einstein použil Planckovu kvantovou hypotézu a popsal elektromagnetické záření světla.

Druhý článek z roku 1905 popisoval to, co se dnes označuje jako speciální teorie relativity. Svoji novou teorii založil na nové interpretaci klasického principu relativity, podle něhož fyzikální zákony jsou stejné bez ohledu na vztažnou soustavu. Einstein zde tvrdí, že rychlost světla je konstantní ve všech inerciálních vztažných soustavách, jak je požadované Maxwellovou teorií elektromagnetického pole.

Koncem roku 1905 ukázal, že hmotnost a energie jsou vzájemně ekvivalentní. Einstein nebyl jediným, kdo navrhnul všechny části speciální teorie relativity. Zásadním způsobem však přispěl ke sjednocení důležitých částí klasické mechaniky a Maxwellovy teorie elektromagnetického pole.

Třetí důležitá Einsteinova práce z roku 1905 se týkala statistické mechaniky, kterou studoval **Ludwig Boltzmann a Josiah Gibbs**.

Po roce 1905 Einstein pokračoval ve své práci na teorii relativity a ve statistické mechanice. Významně přispěl k rodící se kvantové teorii, avšak především rozšířil speciální teorii relativity o zrychlení. V roce 1907 vyslovil princip ekvivalence, podle něhož gravitační zrychlení nelze odlišit

od zrychlení, které je způsobeno mechanickými silami. Gravitační hmotnost je totožná s inerciální hmotností.

V roce 1908 se Einstein stal lektorem na Univerzitě v Bernu, když dokončil svoji habilitační práci na téma "Důsledky pro šíření záření plynoucí ze zákona rozdělení energie černého tělesa". Roku 1909 se stal profesorem fyziky na Univerzitě v Zürichu a dal výpověď v patentovém úřadě.

Od roku 1909 se stal jedním z předních vědeckých myslitelů. V roce 1911 byl jmenován profesorem Univerzity Karlo-Ferdinandovy v Praze. Rok 1911 byl pro Einsteina významný. Předpověděl, že světlo vzdálené hvězdy se nepatrně zakřivuje při průchodu blízko Slunce. To umožnilo později provést první přímý experimentální důkaz Einsteinovy teorie. Tento důkaz podal v Africe v roce 1919 pozorováním zatmění Slunce **Arthur Stanley Eddington**.

V roce 1912 začal Einstein novou fázi svého studia gravitace s pomocí svého přítele matematika **Marcela Grossmanna**. Einstein ve své práci použil tenzorovou analýzu, kterou vypracovali **Tullio Levi-Civita** a **Georgorio Ricci-Curbastro**. Einstein nazval svoji práci obecnou teorií relativity. Z Prahy v roce 1912 odešel do Zürichu, kde získal místo v *Eidgenössische Technische Hochschule*.

V roce 1914 se vrátil do Německa, ale neprojevil zájem o německé občanství. Stal se členem Pruské akademie věd a získal vědecké místo na Univerzitě v Berlíně. Po vytvoření Ústavu fyziky císaře Viléma byl jmenován jeho ředitelem.

Po opravení několika chyb koncem roku 1915 publikoval definitivní verzi obecné teorie relativity. Donedávna se vedli diskuse o Einsteinovo prvenství. Klíčová Einsteinova práce o obecné teorii relativity byla dokončena 25. listopadu 1915 a publikována 2. prosince 1915. Práce jeho spolupracovníka, **David Hilberta**, která byla publikována 31. března 1916 a obsahovala téměř identické rovnice, byla dokončena již 20. listopadu 1915, tedy pět dní před dokončením práce Albertem Einsteinem. Proto z toho někteří historikové vyvozovali, že Einstein tyto rovnice opsal od Hilberta. Nový výzkum však dokázal, že tato hypotéza není pravdivá. Je totiž prokázáno, že původní Hilbertova práce neobsahovala podstatné rovnice, které **David Hilbert** do práce doplnil až 20. prosince, když prostudoval Einsteinův rukopis. Einstein a Hilbert v této době totiž byli velmi blízcí spolupracovníci. (*Science, 14 November 1997.*)

Důvodem hledání obecné teorie relativity nebyl žádný hrubý nesoulad newtonovské gravitační teorie s pozorováním, ale různé estetické, geometrické a fyzikální požadavky. Klíčovými prvky, které k ní vedly, byly Galileův princip ekvivalence a myšlenka neeuklidovské geometrie, která je přirozeným nástrojem pro popis zakřiveného prostoročasu. V roce 1915 nebyla ještě známa žádná pozorování, která by si vynucovala revizi newtonovské teorie.

V roce 1919 britská expedice v Africe pod vedením **Arthura Stanleyho Eddingtona** podala pozorováním zatmění Slunce první experimentální důkaz Einsteinových předpovědí. 7. listopadu 1919 britský tisk *The London Times* napsal v titulku "Revoluce ve vědě. Nová teorie vesmíru".

V roce 1920 byly Einsteinovy přednášky v Berlíně narušovány demonstracemi, které byly, ačkoliv to oficiální místa popírala, protizidovské. Einsteinova práce byla v tomto období napadána kvůli jeho podpoře Lorentze, Plancka a Eddingtona.

V roce 1921 Einstein poprvé navštívil Spojené státy s cílem získat finanční podporu pro vybudování Hebrejské univerzity v Jeruzalémě. Během své návštěvy obdržel Barnardovu cenu a také několikrát přednášel o teorii relativity. Když přednášel ve velké posluchárně v Princetonu, byl překvapen počtem lidí: "*Nikdy jsem netušil, že se tolik Američanů zajímá o tenzorovou analýzu*".

V roce 1921 **Albert Einstein** obdržel Nobelovu cenu, avšak nikoliv za speciální nebo obecnou teorii relativity, ale za svoji práci o fotoelektrickém jevu. V prosinci 1922, kdy měl cenu převzít, byl na cestě v Japonsku. V té době vykonal řadu mezinárodních návštěv. Počátkem roku 1922 navštívil Paříž, během roku 1923 navštívil Palestinu. Po svém posledním vědeckém objevu v roce 1924, který se týkal spojení vln a hmoty, v roce 1925 navštívil Severní Ameriku.

V roce 1925 obdržel Copleyovu medaili Královské společnosti a v roce 1926 zlatou medaili Královské astronomické společnosti.

Na Solvayské konferenci v roce 1927 začali **Albert Einstein** a **Niels Bohr** vést dlouhé debaty o kvantové mechanice. Této konferenci se účastnili také **Max Planck**, **Niels Bohr**, **Louis de Broglie**, **Werner Heisenberg**, **Erwin Schrödinger** a **Paul Dirac**. Tehdy poprvé uvedl svůj názor na pravděpodobnostní interpretaci kvantové mechaniky.

V roce 1928 byl Einstein fyzicky přepracován a musel se nějakou dobu zotavovat.

Od roku 1930 však pokračoval v mezinárodních návštěvách, opět ve Spojených státech. V roce 1932 znovu navštívil Spojené státy a bylo mu nabídnuto místo v Princetonu. Einstein měl 7 měsíců pracovat v Berlíně a 5 měsíců v Princetonu. V prosinci 1932 proto Einstein odjel do Princetonu.

V předčasných volbách 6. listopadu 1932 získala NSDAP 33,1% hlasů a měla relativní většinové zastoupení s velkým předstihem před ostatními stranami. Průmyslníci a latifundisté za této situace vyzvali ve své petici z 19. listopadu 1932 prezidenta Hindenburga, aby Hitlera jmenoval říšským kancléřem. Hindenburg jmenoval do čela kabinetu Schleichera, ale velké průmyslové a finanční skupiny svoji podporu tomuto kabinetu nevyslovily. Proto 30. ledna 1933 prezident Hindenburg jmenoval říšským kancléřem **Adolfa Hitlera**.

Albert Einstein se do Německa už nikdy nevrátil. V březnu roku 1933 napsal své vyznání proti nacionálnímu socialismu:

"Dokud se mi k tomu bude naskýtat možnost, budu pobývat pouze v takové zemi, kde vládne politická svoboda, snášlivost a rovnost všech občanů před zákonem. K politické svobodě patří svoboda ústní i písemné artikulace politického přesvědčení, ke snášlivosti úcta vůči jakémukoliv přesvědčení toho kterého jednotlivce. Tyto předpoklady v současné době v Německu nejsou splněny. Jsou tu pronásledováni všichni, kdo se obzvláště zasloužili o to, aby se dařilo mezinárodnímu dorozumění, a mezi nimi i někteří čelní umělci.

Tak jako kterýkoliv jednatel, může duševně onemocnět i kterýkoliv společenský organismus, zejména v době, kdy se nežije snadno. Národy obvykle takovými neduhům odolají. Doufám, že v Německu už brzo zavládnou zdravé poměry a že se tu v budoucnosti velcí lidé jako Kant a Goethe nebudou jen čas od času oslavovat, nýbrž že se ve veřejném životě a v obecném povědomí také prosadí zásady, které hlásali." [6]

21. dubna 1933 Albert Einstein zaslal rezignaci na své členství v Bavorské akademii věd:

"Svou rezignaci na funkci v Pruské akademii věd jsem zdůvodnil tím, že za stávajících poměrů nehodlám nadále ani být německým občanem, ani tak či onak závisel na pruském ministerstvu školství.

Tyto důvody by sami o sobě ještě nepodmiňovaly řešení mých vztahů vůči bavorské Akademii. Jestliže si přesto přeji, aby bylo mé jméno vyškrtnuto ze seznamu jejích členů, má to důvod jiný: Akademie má v první řadě za úkol podporovat a chránit vědeckou činnost v té které zemi. Německé

učené společnosti však - pokud mi je známo - přijaly mlčky fakt, že nemalá část německých vědců a studentů i lidí vykonávajících své povolání na základě akademického vzdělání se v Německu zbavuje možnosti pracovat a vydělávat na živobytí. Nechci být členem pospolitosti, která - i když pod nátlakem - zaujímá podobný postoj." [6]

Během roku 1933 Einstein cestoval po Evropě a navštívil Oxford, Glasgow, Brusel a Zürich. Dostal řadu nabídek na akademické místo, např. z Jeruzaléma, Leidenu, Oxfordu, Madridu a Paříže.

Od roku 1935 mu byl povolen trvalý pobyt ve Spojených státech amerických. V Princetonu se pokoušel sjednotit jednotlivé fyzikální teorie. Narazil však na hluboké problémy.

V roce 1940 se stal občanem Spojených států, avšak ponechal si švýcarské občanství. Během svého života významně přispěl ke světovému míru. V roce 1944 vydal svoji práci z roku 1905 o speciální teorii relativity za 6 miliónů dolarů, které věnoval na válečnou pomoc. Dnes se rukopis této práce nachází v Knihovně Kongresu Spojených států.

V roce 1949 se Einstein necítil dobře. Pobyt v nemocnici mu pomohl se zotavit, avšak od té doby se připravoval na možnou smrt. Rukopisy svých vědeckých prací věnoval Hebrejské univerzitě v Jeruzalémě.

V roce 1952 zemřel první prezident Izraele a izraelská vláda Einsteinovi nabídla stát se druhým prezidentem. Einstein tuto nabídku s těžkým srdcem odmítl.

Týden před svou smrtí Einstein napsal svůj poslední dopis, který byl adresován **Bertrandu Russellovi**, ve kterém souhlasil, aby jeho jméno bylo uvedeno na manifestu vyzývající národy ke zničení jaderných zbraní.

5 David Hilbert

narozen: 23. ledna 1862 v Königsbergu, Prusko (dnes Kaliningrad, Rusko)

zemřel: 14. února 19. v Göttingenu, Německo

David Hilbert navštěvoval gymnázium ve svém rodišti. Po jeho absolvování byl přijat na Univerzitu v Königsbergu. Zde studoval u Lindemanna a doktorát získal v roce 1885 za svoji práci "*Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*". Jedním z Hilbertových přátel byl **Hermann Minkowski**. Minkowski a Hilbert se později ve své vědecké práci vzájemně ovlivňovali.

V roce 1884 začal na Univerzitě v Königsbergu pracovat **Adolf Hurwitz** a brzy se stal Hilbertovým přítelem, což se stalo dalším výrazným faktorem dalšího Hilbertova vývoje. Hilbert byl v letech 1886 až 1895 členem University v Königsbergu. Do roku 1892 byl soukromým docentem a později mimořádným profesorem. V roce 1893 byl jmenován řádným profesorem.

V roce 1892 přešel z Göttingenu do Berlína Schwarz, který zde zaujal Weierstrassovo místo. **Felix Klein** chtěl, aby Hilbert zaujal Schwarzovo místo v Göttingenu. Kleinovi se však nepodařilo své kolegy přesvědčit a Schwarzovo místo získal **Heinrich Weber**. Již o tři roky později Heinrich Weber přešel do Strasbourgu. V roce 1895 tak získal David Hilbert místo na katedře matematiky na Univerzitě v Göttingenu, kde setrval až do konce své vědecké práce.

Hilbertovo významné postavení ve světě matematiky po roce 1900 způsobilo, že se řada universit o něj zajímala. V roce 1902 mu nabídla místo Universita v Berlíně. Hilbert toto místo odmítl a požadoval, aby na Universitě v Göttingenu bylo zřízeno místo pro jeho přítele Minkowského.

Hilbertovou první prací byla v roce 1888 teorie invariantů, kde dokázal Základní větu. O dvacet let dříve **Paul Gordan** dokázal konečnou základní větu pro binární formy. Pokusy zobecnit tento Gordanův výsledek na systémy s více než dvěma proměnnými byly neúspěšné kvůli výpočetním problémům. Hilbert se pokusil nejprve využít Gordanovu metodu, avšak brzy se vydal vlastní cestou. Objevil zcela abstraktní cestu, jak dokázat konečnou základní větu pro libovolný počet proměnných.

Hilbert publikoval svůj výsledek v časopise *Mathematische Annalen*. Avšak **Paul Gordan**, který byl odborníkem na teorii invariantů pro časopis *Mathematische Annalen*, nebyl schopen Hilbertovu revoluční myšlenku ocenit. Zaslal Hilbertovu práci se svým komentářem Kleinovi. Ve svém komentáři uvedl, že problém leží někde hlouběji. Hilbert sice správně použil formálních pravidel a pomocí nich provedl potřebný důkaz, avšak Gordan se domníval, že tento důkaz není dostatečný.

Hilbert se poradil se svým přítelem Hurwitzem a sám napsal Kleinovi, že nemá sebemenší důvod na svém článku cokoliiv změnit. Klein tak stál před rozhodnutím. Hilbert byl pouhým asistentem, zatímco Gordan byl předním odborníkem na teorii invariantů a navíc byl blízkým Kleinovým přítelem. Klein však pochopil význam Hilbertovy práce a doporučil její publikování v časopise bez jakýchkoliiv změn.

V další práci Hilbert svoji metodu rozšířil a článek zaslal znovu časopisu *Mathematische Annalen* a Kleinovi. Klein po prostudování rukopisu Hilbertovi napsal, že je přesvědčen o tom, že Hilbertův článek je vůbec nejdůležitější prací, kterou časopis *Mathematische Annalen* o obecné algebře kdy vydal.

V roce 1893 Hilbert začal pracovat na práci "*Zahlbericht*" o algebraické teorii čísel. Práci dokončil v roce 1897. Tato práce se stala skvělou syntézou prací **Ernsta Eduarda Kummera**, **Leopolda Kroneckera** a **Julia Wilhelma Richarda Dedekinda** a obsahovala řadu nových Hilbertových myšlenek.

Hilbertova práce v geometrii měla na tento obor největší vliv od dob Euklida. Systematické studium axiomů euklidovské geometrie přivedlo Hilberta k návrhu 21 axiomů, jejichž význam podrobně analyzoval. V roce 1899 publikoval práci "*Grundlagen der Geometrie*", v níž definoval geometrii na formálním axiomatickém základě. Kniha se dočkala nových vydání a měla zásadní vliv na axiomatizaci matematiky.

Dvacet tři Hilbertových problémů se stalo výzvou (a některé dosud jsou) k řešení fundamentálních otázek matematiky. Podnětem byla strhující Hilbertova přednáška "Problémy matematiky" na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži. Jeho řeč o matematice 20. století byla plná optimismu.

Mezi Hilbertovy problémy patří hypotéza kontinua, dobré uspořádání reálných čísel, Goldbachova domněnka, Rimenannova hypotéza, rozšíření Dirichletova principu a řada dalších. Většina Hilbertových problémů byla ve 20. století vyřešena a řešení každého z nich mělo značný vliv na vývoj celé matematiky.

Dnes je Hilbertovo jméno spojováno především s pojmem Hilbertova prostoru. Hilbertova práce o integrálních rovnicích v roce 1909 vedla přímo k funkcionální analýze. Tato práce se stala také

základem nekonečně rozměrných Hilbertových prostorů, které jsou užitečným nástrojem matematické analýzy a kvantové teorie. Díky Hilbertově práci o integrálních rovnicích došlo k rozvoji matematické fyziky, zejména kinetické teorie plynů a teorie záření.

V roce 1915 Hilbert objevil správné rovnice pole obecné teorie relativity krátce před **Albertem Einsteinem**.

V roce 1934 a 1939 publikoval dva svazky *”Grundlagen der Mathematik”*, které se staly základem ”teorie důkazů”, pomocí níž se měla dokázat konsistence matematiky. **Kurt Gödel** v roce 1931 pak ukázal, že takový důkaz neexistuje.

David Hilbert ovlivnil řadu oblastí matematiky, jako je teorie invariantů, teorie čísel, funkcionální analýza, teorie integrálních rovnic, matematická fyzika a výpočet variací.

Mezi Hilbertovy studenty patřil **Hermann Weyl**, **Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** nebo světový šachový šampión **Lasker**.

Hilbert získal řadu ocenění. V roce 1905 Maďarská akademie věd vydala zvláštní publikaci o Hilbertovi. V roce 1930 se Hilbert stal čestným občanem města Königsbergu. Jeho život lze charakterizovat jeho vlastním citátem:

”Wir müssen wissen, wir werden wissen”. - Musíme vědět a budeme vědět.

6 Emmy Amalie Noether

(narozena: 23. března 1882 v Erlangenu, Bavorsko, Německo

zemřela: 14. dubna 1935 v Bryn Mawr, Pennsylvania, USA)

Otec Emmy Noether, Max Noether byl významným matematikem a profesorem na Univerzitě v Erlangenu. Její matkou byla Ida Kaufmann ze zámožné rodiny. Oba rodiče byli židovského původu a Emmy byla nejstarší ze čtyř dětí. Mladší tři byli chlapci.

Emmy Amalie Noether navštěvovala v letech 1889 až 1897 školu *Höhere Töchter Schule* v Erlangenu. Zde studovala němčinu, angličtinu, francouzštinu, aritmetiku a hru na piano. Milovala tanec a pořádala večírky s dětmi otcových kolegů z univerzity. V té době se chtěla stát učitelkou jazyků a proto dál studovala angličtinu a francouzštinu. V roce 1900 úspěšně vykonala zkoušky Bavorského státu a stala se certifikovanou učitelkou angličtiny a francouzštiny na bavorských dívčích školách.

Avšak učitelkou jazyků se nikdy nestala. Rozhodla se pro ženy těch dob obtížnou cestu a začala studovat na univerzitě matematiku. Ženy mohly na německých univerzitách studovat pouze neoficiálně a každý profesor musel dát souhlas k tomu, aby Emmy mohla navštěvovat jeho přednášky. V letech 1900 až 1902 navštěvovala přednášky na Univerzitě v Erlangenu. V roce 1903 vykonala imatrikulační zkoušku v Norimberku a odešla na Univerzitu v Göttingenu. V letech 1903 až 1904 navštěvovala přednášky **Blumenthala**, **David Hilberta**, **Felixe Kleina** a **Hermann Minkowského**.

V roce 1904 dostala souhlas se imatrikulovat v Erlangenu. V roce 1907 získala doktorát za práci pod vedením **Paula Gordana**. Hilbertova základní věta z roku 1888 hovořila o existenci nekonečných invariantů n proměnných. **Paul Gordan** však hledal konstruktivní důkaz a objevil konstruktivní metodu pro získání stejných výsledků, jakých dosáhl **David Hilbert**. Doktorská

práce Emmy Noether spočívala v použití Gordanovy konstruktivní metody a obsahovala výpočty pro 331 ternárních bikvadratických forem.

Po dokončení doktorátu obvykle absolvent získal akademické místo. Avšak ženy tuto možnost neměly. Proto Emmy Noether zůstala v Erlangenu a pomáhala svému otci, který jí byl velice vděčný. Pokračovala také ve svém vlastním bádání. Byla ovlivněna **Ernstem Sigismundem Fischerem**, s nímž se setkala v roce 1911. Začala se zabývat Hilbertovou abstraktní metodou.

Její pověst se rychle zlepšovala s tím, jak publikovala své práce. V roce 1908 byla přijata do *Circolo Matematico di Palermo* a v roce 1909 se stala členkou *Deutsche Mathematiker Vereinigung*. Ve stejném roce dostala pozvání na výroční zasedání Společnosti v Salzburgu. V roce 1913 přednášela ve Vídni.

V roce 1915 **David Hilbert** a **Felix Klein** ji vyzvali, aby zůstala v Göttingenu i přes to, že sváděli bitvu s vedením fakulty. Po dlouhém sporu s univerzitními představiteli mohla v roce 1919 získat habilitaci. Během této doby jí Hilbert umožnil, aby přednášela na jeho přednáškách. Například v seznamu přednášek zimního semestru let 1916 až 1917 čteme: "*Seminář matematické fyziky, profesor Hilbert za asistence dr. Noether, pondělky, od 4 do 6 hodin, bez školního*".

Během svého působení v Göttingenu zřejmě tyto přednášky navštěvoval také **Enrico Fermi**. Emmy Noether pracovala ve skupině **Davidu Hilberta** a **Felixe Kleina**. Zabývala se matematickou fyzikou a zejména obecnou teorií relativity. Krátce poté, co přijela v létě roku 1915 do Göttingenu, jí **Albert Einstein** seznámil s obecnou teorií relativity, na jejímž dokončení ještě pracoval. Téměř ve stejné době, kdy **Albert Einstein** v listopadu 1915 obecnou teorii relativity dokončil, **David Hilbert** objevil tvar lagrangianu, který řešil problém této teorie, jímž se Einstein zabýval dříve. Řešení tohoto problému sice bylo konsistentní s teorií pole, avšak obsahovalo závažný fyzikální problém obecné teorie relativity. Zdálo se, že neplatí zákon zachování energie, který běžně platil v klasických teoriích pole. **David Hilbert** požádal Emmy Noether, zda by se nepokusila tento problém řešit. Emmy Noether problém úspěšně vyřešila matematickou formulací Věty Noetherové, která ukazuje souvislosti symetrie a zákonů zachování.

Význam Věty Noetherové je pro moderní fyziku zásadní. Do té doby byl princip zachování energie obestřen záhadami, což vedlo k některým obskurním fyzikálním systémům, které zformulovali **Ernst Mach** a **Ostwald**. Emmy Noether jednoduchou a jasnou matematickou formulací přispěla k demystifikaci fyziky.

Věta Noetherové se skládá ze dvou vět, nazývaných věta I a věta II. Emmy Noether tyto věty dokázala ve svém zásadním článku, který v roce 1918 **Felix Klein** přečetl v *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (Královská společnost věd v Göttingenu). Emmy Noether nebyla členkou této Společnosti a zřejmě se jí nestala ani po přečtení tohoto článku. Záznamy Královské společnosti se bohužel během druhé světové války ztratily a proto nevíme, kdy byl ženám vstup do Společnosti povolen. Úspěchem již bylo, že mohla být přítomna při čtení svého článku. Obdobné společnosti v Londýně a v Paříži umožnily ženám vstup až po druhé světové válce. Královská společnost v Londýně zvolila svojí první členku v roce 1945 a *Académie des Sciences* v Paříži až v roce 1962, přestože obě společnosti byly založeny v 17. století.

V článku dokázala dvě věty, jimiž dokázala obecnou souvislost mezi symetriemi a zákony zachování. Tato práce vedla k hlubšímu pochopení takových zákonů jako princip zachování energie, hybnosti, rotačního momentu a dalších. Později se stala základním nástrojem pro objev kalibračních symetrií v průběhu 20. století.

Přestože obecná teorie relativity nebyla jejím hlavním zájmem, Emmy Noether napsala o této teorii několik článků. V jednom svém dopise **Albert Einstein** napsal **Davidu Hilbertovi**, že obdržel od slečny Noether velmi zajímavý článek o invariantních formách. Einstein byl překvapen, jak obecně lze popsat principy jeho teorie.

Emmy Noether se především podílela na rozvoji abstraktní algebry. V době, kdy **Enrico Fermi** pobýval v Göttingenu, se vrátila k přednášení a psaní článků o tomto oboru. Abstraktní algebra vznikla publikací dvou článků Emmy Noether. První článek publikovala společně se Schmeidlerem. Druhým článkem byla velmi významná práce "*Idealtheorie in Ringbereichen*", která podnítila jeden z hlavních proudů abstraktní algebry, teorie komutativních okruhů.

Historikové matematiky kladou vznik moderní abstraktní algebry do období let 1921 až 1923, kdy byly publikovány práce **Emmy Noether**, **Emila Artina** a jejich školy. Významní matematikové z celého Německa a ze zahraničí přijížděli za Emmy Noether na konzultace a navštěvovali její přednášky. **Enrico Fermi** v Göttingenu studoval fyziku s **Maxem Bornem** a Emmy Noether v té době působila na katedře matematiky. Zřejmě Fermi navštěvoval také její přednášky.

Je třeba poznamenat, že Emmy Noether nikdy nebyla jmenována na placené místo na žádné fakultě Univerzity v Göttingenu. Její životopisec **Auguste Dick** se pokoušel nalézt příčiny. Bylo to snad proto, že byla Židovka? Nebo to bylo proto, že vystupovala jako pacifistka proti agresivní zahraniční politice Německa? Autorka článku [5] je přesvědčena, že svoji roli sehrála diskriminace žen v Německu. Více než deset let po získání doktorátu v roce 1908 na Univerzitě v Erlangenu Emmy Noether působila na neplaceném místě na Univerzitě v Göttingenu, kde přednášela a vědecky pracovala. Během tohoto období publikovala patnáct článků ve významných matematických časopisech, stala se členkou prestižní *Circolo Matematico di Palermo* a *Deutsche Mathematiker Vereinigung* (Německá asociace matematiků), kde měla dvě přednášky. Na pozvání **Davidu Hilberta** a **Felixe Kleina** se stala členkou jejich skupiny na Univerzitě v Göttingenu, avšak univerzitní senát ji na místo soukromého docenta odmítl jmenovat. Senát jako důvod uvedl to, že je žena. **David Hilbert** rozhořčeně opustil zasedání senátu se slovy "*Nevěděl jsem, že pohlaví kandidáta je argumentem proti jeho jmenování soukromým docentem. Mimochodem, jsme univerzitou a nikoliv správou lázní.*"

Po skončení první světové války na Univerzitě v Göttingenu zavládlo liberálnější prostředí a v roce 1919 Emmy Noether byla konečně habilitována. To jí umožnilo na univerzitě samostatně přednášet a pobírat řádný plat. Předtím její přednášky byly uváděny jako přednášky profesora **Davidu Hilberta** za asistence Dr. Emmy Noether.

6. listopadu 1932 v předčasných volbách v Německu získala pod vedením **Adolfa Hitlera** Národně socialistická německá dělnická strana (*NSDAP, Nationalsozialistische Deutsche Arbeiterpartei*) 33,1% hlasů a měla relativní většinové zastoupení s velkým předstihem před ostatními politickými stranami. Průmyslníci a latifundisté za této situace vyzvali ve své petici z 19. listopadu 1932 prezidenta Hindenburga, aby Hitlera jmenoval říšským kancléřem. Hindenburg jmenoval do čela kabinetu Schleichera, avšak velké průmyslové a finanční skupiny svoji podporu tomuto kabinetu nevyslovily. Proto 30. ledna 1933 prezident Hindenburg jmenoval říšským kancléřem **Adolfa Hitlera**.

Volby vypsané na 5. března 1933 proběhly pod nátlakem teroristické kampaně. 27. února 1933 nacisté zapálily *Reichstag* (budovu Říšského sněmu), což již 28. února 1933 poskytlo vhodnou záminku pro vydání prvního prezidentského dekretu, který se hluboce dotýkal občanských a politických práv a zaváděl trest smrti pro řadu zločinů proti bezpečnosti státu. Dekret přenesl řadu pravomocí ze zákonodárné na výkonnou, čímž došlo k zásadním změnám politického systému Německa.

5. března 1933 proběhly volby do Říšského sněmu, v nichž NSDAP získala 43,9% hlasů a nacionalističtí spojenci NSDAP 8% hlasů. Na prvním zasedání Říšského sněmu bylo vyloučeno všech 81 řádně zvolených komunistických poslanců.

Inaugurace Říšského sněmu proběhla 21. března 1933, v tzv. Postupimský den (Postupim, něm. *Potsdam*, město nedaleko Berlína), aby se zdůraznila vůle pro pokračování pruské vojenské tradice. 24. března 1933 Říšský sněm odhlasoval předání plných mocí říšskému kancléři. Proti hlasovali pouze sociálně demokratičtí poslanci. V praxi to znamenalo, že se Říšský sněm zbavil možnosti ovládat exekutivu. Tímto způsobem, aniž bylo nutné rušit ústavu výmarské republiky, si nacistická vláda přisvojila neomezené právo upravovat ústavní normy. Vláda se zbavila všech zákonných omezení, mohla vydávat zákony, měnit politický systém a odvolávat ústavní záruky.

V březnu 1933 byly postaveny první koncentrační tábory, kam NSDAP odstraňovala své politické a rasové protivníky. Do těchto táborů se dostaly desetitisíce stranických funkcionářů, odpůrců režimu a intelektuálů.

14. července 1933 byl vydán zákon, který zakazoval vytváření politických stran a prohlásil za jedinou povolenou stranu NSDAP. Spolu se zákonem ze 7. dubna 1933, který definoval normy k očistě veřejné správy od osob "neárijského původu", přispěl k převzetí všech výkonných a správních funkcí ve státě.

Emmy Noether jako žena židovského tedy "neárijského" původu nesměla na Univerzitě v Göttingenu přednášet. V roce 1934 byly navíc všechny ženy, bez ohledu na původ, vyloučeny ze všech univerzitních míst v souladu s nacistickou politikou pro ženy "*Kirche, Kinder, Küche*". Teprve později, když došlo k obratu ve druhé světové válce, ženám bylo nařízeno nastoupit do dělnických zaměstnání.

Hermann Weyl o Emmy Noether napsal:

"Bouřlivé období bojů, jaké jsme zažili v Göttingenu v létě roku 1933, semklo lidi těsněji dohromady. Proto mám tak živé vzpomínky na tyto měsíce. Emmy Noether, její odvaha, upřímnost, její přehlížení vlastního osudu, její smířlivý duch, byly pro nás uprostřed té veškeré nenávisti, podlosti, zoufalství a bolesti všude kolem morální útěchou."

Emmy Noether brzy z Německa emigrovala. Dostala dvě nabídky. Jednu ze *Sommerville College* v Oxfordu, kde jí nabídly ubytování, možnost přednášet a menší stipendium. Druhá nabídka pocházela z ženské koleje *Bryn Mawr College* v Pennsylvánii. Tato kolej jí nabídla hostitelskou profesuru, placenou částečně Rockefellerovou nadací, která podporovala vědce uprchlé z Německa. Emmy Noether tuto nabídku přijala a navíc jednou týdně jezdila do Ústavu pro pokročilá studia v Princetonu (*the Institute for Advanced Study*), kde přednášela. V Princetonu jen díky svému matematickému věhlasu získala placené místo.

Emmy Noether předčasně zemřela v roce 1934 na postoperační infekci. **Albert Einstein** napsal do novin *New York Times* nekrolog, v němž se mimo jiné uvádělo:

"V říši algebry, jíž se po století zabývali nejnadanější matematikové, objevila metody, které mají nesmírnou důležitost. Čistá matematika je v jistém smyslu poezií logických myšlenek. Ve snaze dosáhnout logické krásy, jsou objeveny duchovní formule nezbytné k hlubšímu průniku do zákonů přírody..."

Existuje, naštěstí, několik lidí, kteří ve svém životě včas poznají, že nekrásnější a nejspokojivější prožitky dostupné lidstvu nepocházejí odněkud z vnějšku, ale souvisejí s rozvojem vlastního citění, myšlení a práce jednotlivce. Skuteční umělci, objevitelé a myslitelé byli vždy lidmi tohoto druhu. Přestože životy těchto lidí probíhají nenápadně, plody jejich úsilí jsou nejcennějším přínosem, který nějaká generace může zanechat svým potomkům.”

6.1 Historie velkého objevu Emmy Noether

V roce 1915 Emmy Noether přijala pozvání stát se členkou matematického týmu v Göttingenu vedeného **Davidem Hilbertem**. **Hermann Weyl** napsal, že jak Hilbert, tak **Felix Klein** přivítali, že Emmy Noether jim pomůže se studiem teorie invariantů. V té době bylo Emmy Noether 33 let a před sedmi lety získala doktorát matematiky na Univerzitě v Erlangenu.

V červnu nebo červenci roku 1915, krátce poté, co Noether přijela do Göttingenu, **Albert Einstein** přednesl v Göttingenu šest přednášek o obecné teorii relativity. V té době tato teorie nebyla ještě dokončena, protože Einstein ještě nenalezl kompletní rovnice pole. Avšak základní myšlenka byla jasná. O tento problém projeví zájem Hilbert i Klein. Albert Einstein pracoval na zobecnění speciální teorii relativity, které by zahrnovalo gravitaci, již od roku 1905. V roce 1907 objevil souvislost gravitační a inerciální hmotnosti, kterou zformuloval v principu ekvivalence. Trvalo mu však dalších osm let, než obecnou teorii relativity dokončil. V listopadu 1915 našel kompletní rovnice pole. Publikoval svůj převratný článek v časopisu Pruské akademie věd, v němž uvedl svoji obecnou teorii relativity v definitivní podobě. Ve stejné době David Hilbert dokončil rukopis, který obsahoval stejné rovnice pole odvozené pomocí variačního principu. Hilbert a Einstein dospěli nezávisle na sobě ke stejným výsledkům.

V listopadu 1915 Emmy Noether napsala **Ernstu Fischerovi**, že David Hilbert připravil přednášku o myšlenkách Einsteinových diferenciálních invariantů. Zřejmě tehdy začala studovat teorii relativity. V té době publikovala dva články, o nichž **Hermann Weyl** napsal, že obsahují jedinečnou a univerzální matematickou formulaci dvou nejvýznamnějších aspektů obecné teorie relativity. Prvním z nich byla redukce problému diferenciálních invariantů na čistě algebraický problém v běžné souřadnicové soustavě, druhým bylo nalezení identity mezi levou stranou Eulerových rovnic a variačním problémem. Einstein napsal Hilbertovi, že od slečny Noether obdržel velmi zajímavý článek o invariantních formách. Uvedl, že byl překvapen jejím obecným přístupem k problému.

Druhým článkem Emmy Noether byl článek *"Invariante Variationsprobleme"*. David Hilbert se zabýval základními zákony fyziky již řadu let. Jeho článek *"Grundlagen der Physik"* se týkal odvození rovnic pole v obecné teorii relativity pomocí variačního principu. Tento článek byl důsledkem jeho snahy nalézt jednotnou teorii pole pro gravitaci, elektromagnetismus a hmotu. Nebyl však úspěšný a Hilbert jej později ze svých sebraných prací vynechal. Hilbertovo odvození rovnic pole je však originálním a důležitým přínosem k obecné teorii relativity. Lagrangián, který Hilbert definoval, je dnes znám jako Hilbertův-Einsteinův lagrangián a Hilbertova formulace teorie se dnes široce využívá. Pais napsal, že David Hilbert nebyl prvním, kdo vyjádřil princip gravitace. Před ním to byl Lorentz a Einstein, avšak Hilbert byl první, kdo tento princip vyjádřil zcela správně.

V roce 1915 **Albert Einstein** svoji obecnou teorii relativity dokončil, však zůstaly některé nevyřešené problémy. Jedním z nich byl princip lokálního zachování energie. V obecné teorii relativity se na rozdíl od klasických teorií pole, tj. Newtonovy teorie gravitace, teorie elektromagnetického pole, hydrodynamiky, atd., energie lokálně nezachovává. Problém zachování energie v obecné teorii relativity trápil řadu lidí. **David Hilbert** se o tomto problému vyjadřoval jako o "selhání zákona zachování energie". V korespondenci s **Felixem Kleinem** Hilbert uvedl, že toto selhání je pro obecnou teorii relativity charakteristické a místo "vlastního zákona zachování" v takové teorii

musí existovat "nevládní zákon zachování". Emmy Noether tuto myšlenku přesně zformulovala a dokázala.

Felix Klein pracoval na problému zákona zachování energie, přesněji Hilbertova vektoru energie, v roce 1916. V korespondenci s Hilbertem uvedl, že Emmy Noether mu v jeho práci pomáhala. Když s ní Klein hovořil, uvedla, že řešení problému vektoru energie již našla. Rukopis článku předala Kleinovi, který ho prostudoval a přednesl na zasedání Společnosti 19. července 1918.

David Hilbert ve své práci "*Grundlagen der Physik*" z roku 1924 ocenil Emmy Noether za vyřešení problému zachování energie v obecné teorii relativity a odkázal se na její článek.

V roce 1919 Emmy Noether zařadila svůj článek "*Invariante Variationsprobleme*" do své habilitační práce spolu s dalšími dvanácti články, které se staly důležitým přínosem k rozvoji moderní abstraktní algebry. Rok předtím jí habilitace nebyla umožněna. Hermann Weyl uvádí, že během války se David Hilbert pokoušel prosadit habilitaci Emmy Noether na filozofické fakultě Univerzity v Göttingenu, ale neuspěl kvůli odporu filologů a historiků. Po skončení 1. světové války došlo na německých univerzitách k liberalizaci a Emmy Noether byla habilitována. Díky tomu mohla konečně přednášet oficiálně na univerzitě. Jak bylo již uvedeno, **David Hilbert** jí umožňoval přednášet na jeho přednáškách, ale tyto přednášky nemohly být zaplacené. Její přednášky se staly známé v celé Evropě. Ke své práci Noether poznamenala, že vznikla díky její rostoucí spolupráci s Felixem Kleinem a Davidem Hilbertem na Einsteinově obecné teorii relativity.

Podstatou článku "*Invariante Variationsprobleme*" je důkaz, že zákony zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti plynou ze symetrie prostoru a času. Symetrie (invariance) přírodních dějů vůči transformacím prostoru a času má za následek zákon zachování nějaké fyzikální veličiny. Konkrétně Emmy Noether dokázala tři závěry:

- 1. Z invariance přírodních dějů vůči libovolnému posunutí v prostoru plyne zákon zachování úhrnné hybnosti.
- 2. Z invariance přírodních dějů vůči libovolnému posunutí v čase plyne zákon zachování úhrnné energie.
- 3. Z invariance přírodních jevů vůči libovolnému pootočení v prostoru plyne zákon zachování úhrnného momentu hybnosti.

Nelze se pouštět do vysvětlení myšlenkových postupů, na nichž Emmy Noether založila důkazy svých vět. Pokusme se pouze naznačit hlavní myšlenku důkazu. Představme si libovolný kus materiálu, například kovovou kuličku. Atomy jsou uspořádány v krystalové mřížce. Pokud není teplota kuličky blízká absolutní nule ($-273,16$ stupňů Celsia), kmitají všechny atomy kolem svých rovnovážných poloh v krystalové mřížce, a to tím silněji, čím je teplota vyšší. V důsledku toho se celá krystalická mřížka kuličky mocně chvěje tepelným pohybem atomů.

Jako celek však kulička zůstává v klidu. Její atomy se prudce pohybují v krystalové mřížce, avšak jako celek zůstává v klidu. Je to proto, že se všechny pohyby atomů vzájemně vyrovnávají. Jak je však možné, že se tak přesně kompenzují, jestliže každý atom má svoji hybnost? Výsledná hybnost je nulová, a to v každém okamžiku. Úhrnná hybnost tedy zůstává stálá a nemění se.

Jak ukázala Emmy Noether, je to proto, že prostor je homogenní a všechny jeho body jsou rovnocenné. Je-li kulička v klidu, nemůže se sama uvést do pohybu, protože všechny okolní body jsou pro ni stejně dostupné. Důvody k volbě libovolného bodu jsou stejné.

Podobnou úvahou dojdeme k zákonu zachování úhrnného momentu hybnosti, který je důsledek isotropie prostoru. Kulička se nikdy sama neroztočí kolem žádné své osy. Isotropie prostoru znamená, že všechny směry (přímky procházející středem kuličky) jsou rovnocenné. Kulička se nemůže roztočit, protože všechny směry otáčení jsou pro ni stejně dostupné.

Vidíme, že nejde o rovnováhu sil. Argument je mnohem abstraktnější. Jde o symetrii problému, o rovnocennost možností. Z názorných prostorových představ například nelze nijak odvodit, že z homogenosti času plyne zákon zachování úhrnné energie. Vztah mezi časem a energií nemá předchozí názornost. A přece platí stejně reálně, jako předchozí dva vztahy. Emmy Noether otevřela cestu, jak lze zákony zachování elektrického náboje, baryonového čísla, leptonových čísel, isospinu a dalších veličin vyjádřit jako invariance vůči transformacím v příslušných abstraktně definovaných prostorech.