Natura
28. února 2004

Mikroskopický obraz vesmíru
Standardní model částic

zpracoval: Jiří Svršek [1]

podle článku D.P. Roye

Abstract

Jedním z největších úspěchů fyziky 20. století je objev velmi těsného sepjetí mikrokosmu a makrokosmu. Toto sepjetí vychází ze dvou základních principů kvantové mechaniky a teorie relativity (z principu neurčitosti a z ekvivalence hmotnosti a energie) a ze standardního kosmologického modelu velkého třesku. Jak pronikáme stále hlouběji do mikrokosmu, objevujeme nové stavy hmoty s vyšší hmotností a energií, které existovaly krátce po vzniku vesmíru. Proto objevy atomového jádra, nukleonů, kvarků a gluonů a konečně intermediálních bosonů W a Z umožnily v laboratoři vytvořit formy hmoty, které existovaly v počátcích vesmíru. Díky tomu můžeme zmapovat historii vesmíru až do prvních nanosekund po jeho vzniku. Konečně objev Higgsova bosonu a supersymetrických částic v budoucnosti pomůže vyřešit záhadu neviditelné hmoty, která ve vesmíru existuje dodnes jako pozůstatek jeho dávné historie.

Tento text byl zpracován v textovém procesu LaTeX. Slouží mimo jiné jako ukázka způsobu zpracování matematických a fyzikálních textů, které časopis Natura Plus nabídne svým čtenářům ve formátu PDF (podrobněji viz knihovna: Matematika, Fyzika).

[1] e-mail: natura@dkozak.cz, WWW: http://natura.baf.cz

References

[1] **D.P. Roy: Basic Constituents of the Visible and Invisible Matter – A Microscopic View of the Universe** Department of Theoretical Physics. Tata Institute of Fundamental Research. Homi Bhabha Road, Mumbai, India.
10 Jul 2000, physics/0007025, e-Print archive. Los Alamos National Laboratory. US National Science Foundation.
`http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0007025`

[2] **Kulhánek, Petr: Teoretická mechanika.** Studijní text pro doktorandské studium. FEL ČVUT, Praha 2001.
`http://www.aldebaran.cz`

[3] **Ivan Avramidi: Notes on Lie Groups.** New Mexico Tech. January 2000.

[4] **Andrew Baker: An undergraduate approach to Lie theory.** Glasgow 12/11/1999

[5] **PHYSICS NEWS UPDATE. The American Institute of Physics Bulletin of Physics News**. Number 668. January 9, 2004 by Phillip F. Schewe, Ben Stein and James Riordon.

1 Úvodem

Naše představa základních složek hmoty prošla během 20. století dvěma revolučními změnami. K první došlo v roce 1911, když **Ernst Rutherford** ostřeloval α částicemi (jádry atomu hélia) tenkou zlatou fólii. Zatímco většina α částic fólií prošla bez pozorovatelné změny, některé částice se od své původní dráhy odchýlily o značný úhel. Výsledky tohoto experimentu naznačovaly, že atomy obsahují malé pevné jádro, kolem něhož se nachází oblak elektronů. Pozdější experimenty ukázaly, že atomové jádro se skládá z protonů a neutronů.

V roce 1968 ve Středisku lineárního urychlovače ve Stanfordu *(SLAC, Stanford Linear Accelerator Centre)* byl proveden experiment, který byl v roce 1990 oceněn Nobelovou cenou za fyziku. Výzkumníci ostřelovali pomocí elektronů protony. V podstatě opakovali Rutherfordův experiment, avšak s mnohem vyššími energiemi. Výsledky naznačovaly, že proton uvnitř obsahuje tři kompaktní objekty, později nazvané kvarky.

Dnes již z řady experimentů víme, že jaderné částice (hadrony) obsahují buď tři kvarky (baryony) nebo dva kvarky (mesony). [2]

Zásadním rozdílem mezi oběma experimenty jsou použité energie. Rozměr atomu je typicky asi 10^{-10} m, zatímco rozměr protonu je asi 10^{-15} m (1 femtometr). Ze známého principu neurčitosti kvantové mechaniky

$$\Delta E \cdot \Delta x \ > \ \hbar c \ \approx \ 0,2 \text{ GeV} \cdot \text{fm} \tag{1}$$

vyplývá, že čím menší rozměry studujeme, tím větší energie potřebujeme. Proto studium nitra protonu ($x \ll 1$ fm) vyžaduje energii paprsku $E \gg 1$ GeV (10^9 eV), která odpovídá průchodu elektronu potenciálem miliardy voltů. Teprve technologie výkonných urychlovačů umožnila překlenout mezeru mezi oběma experimenty.

V kvantové fyzice se obvykle používají tzv. *přirozené jednotky*, kdy pokládáme $\hbar = c = 1$. Hmotnost částice pak odpovídá její zbytkové energii podle vztahu mc^2. Jednotka GeV se užívá jako základní jednotka hmotnosti, energie a hybnosti. Hmotnost protonu je přibližně 1 GeV.

2 Standardní model částic

Podle našeho současného chápání jsou základními složkami hmoty částice s poločíselným spinem (v jednotkách $\hbar$, které se nazývají **fermiony**. Mezi fermiony patří tři dvojice **leptonů** (elektron e, mion μ, tauon τ, elektronové neutrino ν_e, mionové neutrino ν_μ a tauonové neutrino ν_τ) a tři dvojice **kvarků** (dvojice "up" a "down", dvojice "charm" a "strange" a dvojice "top" a "bottom") [3]

ν_e	ν_μ	ν_τ	0
e	μ	$\tau(2)$	-1
u	c	$t(175)$	$2/3$
d	s	$b(5)$	$-1/3$

V posledním sloupci tabulky je uveden elektrický náboj. Ke každé částici existuje antičástice s opačným nábojem. Hmotnosti nejtěžších částic jsou uvedeny v závorkách v jednotkách GeV.

[2] Baryony se dále rozdělují na hyperony a nukleony, mezi něž patří proton a neutron. Mesony se dále rozdělují na kaony a piony. Leptony (mezi něž patří elektron, mion a tauon a odpovídající neutrina) nejsou složeny z kvarků.

[3] up = nahoru, dowm = dolů, charm = půvabný, strange = podivný, top = svrchní, bottom = spodní

Neceločíselný elektrický náboj kvarků má význam pro jejich slabou jadernou interakci. Kromě elektrického náboje kvarky nesou také nový typ náboje, označovaný jako **barevný náboj**. Barevný náboj má význam pro jejich silnou jadernou interakci, která kvarky udržuje uvnitř částic.

Mezi částicemi existují čtyři silové interakce: silná, elektromagnetická, slabá a gravitační. Kromě gravitační interakce, která je příliš slabá, aby měla v mikrosvětě nějaké pozorovatelné projevy, jsou ostatní interakce kalibračními interakcemi. Jsou zprostředkovány vektorovými částicemi se spinem 1, které se nazývají **kalibrační bosony**. Tyto interakce jsou plně popsány příslušnými kalibračními grupami. [4]

interakce	silná	elmag.	slabá
nosič	g	γ	$W^{\pm}, Z^0$
kalibrační grupa	$SU(3)$	$U(1)$	$SU(2)$

Elektromagnetická interakce mezi elektricky nabitými částicemi (kvarky a elektricky nabitými leptony) je zprostředkována výměnou nehmotných fotonů. Vazba fotonů je úměrná elektrickému náboji. Vazebná konstanta (konstanta jemné struktury) se označuje α. Silná interakce mezi kvarky je zprostředkována výměnou nehmotných vektorových bosonů nazývaných **gluony**. Vazba gluonů je úměrná barevnému náboji. Vazebná konstanta silné interakce se označuje α_S.

Sjednocená teorie elektromagnetické a slabé jaderné interakce se nazývá **kvantová elektrodynamika** QED. Jejími autory jsou **Richard P. Feynman, Julian Schwinger a Sin-Itiro Tomanaga**, kteří v roce 1965 obdrželi Nobelovu cenu za fyziku. Teorie silné jaderné interakce se nazývá **kvantová chromodynamika** QCD. Hlavní rozdíl mezi QCD a QED spočívá v neabelovské podstatě kalibrační grupy $SU(3)$. Proto na rozdíl od elektrického náboje barevný náboj může v abstraktním prostoru zaujmout tři různé směry. Tyto směry se označují jako *červená, modrá a žlutá*. Vzájemnými kombinacemi těchto barevných nábojů (tři kvarky různých barev v baryonech nebo dva kvarky s barvou a antibarvou v mesonech) se barevný náboj zruší a výsledná částice má neutrální barevný náboj, podobně jako atomy jsou elektricky neutrální.

Dalším podstatným důsledkem neabelovské povahy QCD je skutečnost, že samotné gluony nesou barevný náboj. Na rozdíl od fotonů, které nenesou žádný elektrický náboj, proto mohou samointeragovat. Kvůli této samointerakci siločáry pole mezi dvěma barevnými náboji jsou stlačeny do tenké trubice na rozdíl od siločar pole dvou elektrických nábojů. Počet zachycených siločar barevných nábojů je konstantní a výsledná síla nezávisí na vzdálenosti. Potenciál této síly proto vzrůstá lineárně se vzdáleností

$$V_S \;=\; \alpha_S r \tag{2}$$

Kvarky jsou proto uvězněny uvnitř hadronů a k jejich oddělení za normálních podmínek je třeba nekonečně mnoho energie. Siločáry pole elektrických nábojů jsou isotropní. Počet zachycených siločar klesá se vzdáleností a výsledná síla klesá s druhou mocninou vzdálenosti nábojů. Potenciál této síly klesá podle vztahu

$$V_E \;=\; \frac{\alpha}{r} \tag{3}$$

Slabá jaderná interakce je zprostředkována výměnou hmotných vektorových částic, tedy kalibračních bosonů W^+, W^- a Z^0. Slabá jaderná interakce prostřednictvím bosonů W^+, W^- působí na všechny kvarky a leptony s vazebnou konstantou, která se označuje α_W. Částice W^+, W^- patří k dubletové representaci grupy $SU(2)$ a proto nesou stejný kalibrační náboj. Protože vektorové bosony slabé

[4] Podrobněji viz Přílohy (Kalibrační invariance. Lieovy grupy a maticové grupy. Princip nejmenší akce. Věty Noetherové)

interakce mají nenulovou hmotnost M_W, je slabá jaderná interakce omezena vzdáleností. Potenciál této síly klesá podle vztahu

$$V_W \;=\; \frac{\alpha_W}{r} e^{-rM_W} \tag{4}$$

Tento vztah lze snadno vysvětlit pomocí Heisenbergova principu neurčitosti (1). Výměna hmotného bosonu $W^{\pm}$ totiž představuje výměnu energie $\Delta E = M_W c^2$, což odpovídá dosahu $\Delta x = \hbar / M_W c$.

Elektromagnetickou interakci a slabou jadernou interakci se podařilo úspěšně sjednotit do elektroslabé teorie s kalibrační grupou $U(1) \times SU(2)$. Autoři elektroslabé teorie **Sheldon Glashow, Abdus Salam a Steven Weinberg** obdrželi v roce 1979 za tuto práci Nobelovu cenu za fyziku. Tato teorie předpověděla hmotnosti kalibračních bosonů $W^{\pm}$ a Z^0 z relativního poměru intenzit elektromagnetické a slabé interakce:

$$M_W \;=\; 80 \text{ GeV} \qquad M_Z \;=\; 91 \text{ GeV} \tag{5}$$

3 Objevy fundamentálních částic

Jak bylo uvedeno výše, kvarky "up" a "down", z nichž jsou složeny proton a neutron, a nejlehčí lepton elektron tvoří veškerou viditelnou hmotu ve vesmíru. Těžší kvarky a těžší elektricky nabité leptony (miony a tauony) se rozpadají na lehčí částice slabou jadernou interakcí, podobně jako se jádra atomů rozpadají radioaktivním rozpadem β. Proto tyto částice nejsou ve vesmíru běžně pozorovány. Tyto částice však lze vytvořit v laboratoři nebo v experimentech s kosmickým zářením. Mion a podivný kvark "strange" ve formě mesonu K (kaonu) byly objeveny v experimentech s kosmickým zářením již ve 40. letech 20. století. Prakticky nehmotná a stabilní neutrina nebylo snadné objevit, protože s hmotou interagují jen slabě. Elektronové neutrino ν_e objevil v roce 1956 v experimentech s atomovým reaktorem v Los Alamos **Frederic Reines**, který za tento objev v roce 1995 obdržel Nobelovu cenu za fyziku. Mionové neutrino ν_μ objevili v roce 1962 v protonovém synchrotronu v Brookhavenu **Leon Max Lederman, Melvin Schwartz, Jack Steinberger**. Lederman a Steinberger za tento objev v roce 1988 obdrželi Nobelovu cenu za fyziku. K prvnímu pozorování mionového neutrina v kosmickém záření došlo v roce 1965.

Díky pokroku technologie srážkových urychlovačů elektronů s positrony a protonů s antiprotony došlo k objevu dalších částic. Pomocí srážek elektronů e^- s positrony e^+ byl v roce 1974 objeven půvabný kvark "charm", v roce 1975 lepton τ (tauon), v roce 1977 kvark "botton" a v roce 1979 gluon. Pomocí srážek protonů p^+ s antiprotony p^- v roce 1983 byly objeveny bosony $W^{\pm}$ a Z^0 a v roce 1995 kvark "top". Za objev půvabného kvarku "charm" (přesněji za objev resonanční částice J/ψ) obdrželi v roce 1976 **Burton Richter a Samual Chao Chung Ting** Nobelovu cenu za fyziku. **Martin Pearl** obdržel Nobelovu cenu za objev tauonu a **Carlo Rubbia** v roce 1984 obdržel Nobelovu cenu za objev bosonů $W^{\pm}$ a Z^0.

Typická doba života těchto částic je v řádu pikosekund (10^{-12} sekundy), což při relativistických energiích odpovídá dráze těchto částic v délce jen několika stovek mikrometrů. Díky vysokému rozlišení křemíkových detektorů lze tyto částice detekovat ještě před jejich rozpadem. Velmi hmotné bosony $W^{\pm}$ a Z^0 se rozpadají téměř bezprostředně po svém vzniku. Tyto částice byly objeveny jen díky nezaměnitelným stopám jejich rozpadu. Podobně tomu bylo u kvarku "top".

Všechny základní složky hmoty a nositele silových interakcí s výjimkou gravitonu (nositele gravitační interakce) tedy již byly detekovány. Dosud však existuje zásadní problém hmotnosti. Jak bosony $W^{\pm}$ a Z^0 slabé jaderné interakce (a s nimi také hmotové fermiony) získaly hmotnost bez narušení kalibrační symetrie Lagrangiánu?

4 Problém hmotnosti (Higgsův boson)

Významnou vlastností kalibrační teorie je skutečnost, že dynamika všech interakcí je zcela určena symetrií (invariancí) Lagrangiánu při určité kalibrační transformaci, tedy rotaci v určitém abstraktním prostoru definovaném příslušnou kalibrační grupou. [5] Situace se podobá rotační symetrii (invarianci) Lagrangiánu v běžném prostoru, která vede k zákonu zachování úhlového momentu. V našem případě však předpokládáme, že se rotační úhly mění bod od bodu (jsou lokalizovány). Zmíněná invariance Lagrangiánu předpovídá nejen zachování kalibračních nábojů, ale také přítomnost nehmotných vektorových částic (kalibračních bosonů) v souvislosti s jejich vazbou s hmotovými fermiony. Avšak hmotnostní člen kalibračních bosonů lze chápat jako příčinu narušení kalibrační symetrie Lagrangiánu. Na druhé straně hmotnosti skalárních částic (se spinem 0) jsou vůči kalibrační transformaci invariantní. Proto si lze představit, že kalibrační bosony $W^{\pm}$ a Z^0 slabé jaderné interakce a hmotové fermiony získaly hmotnost absorbcí skalárních částic.

To je známý **Higgsův mechanismus**. Předpokládá se existence skalární částice se zápornou druhou mocninou hmotnosti (tj. s imaginární hmotností). Tato částice vede ke spontánnímu narušení symetrie, tedy základní stav energie není invariantní vůči kalibrační transformaci. Výsledkem je, že kalibrační bosony $W^{\pm}$ a Z^0 mohou získat hmotnost. Vzniká fyzická skalární částice s reálnou hmotností srovnatelnou s hmotností bosonů $W^{\pm}$ a Z^0. Tato částice se nazývá **Higgsův boson**, jejíž detekce by potvrdila tento mechanismus vzniku hmotnosti kalibračních bosonů a hmotových fermionových částic. Přes spontánní narušení symetrie však může existovat konsistentní kalibrační teorie elektroslabé interakce, protože Lagrangián kalibrační symetrii zachovává, jak ukázali **Gerardus t'Hooft** z Univerzity v Utrechtu a **Martinus Veltman** původně z Univerzity v Michiganu, kteří obdrželi v roce 1999 Nobelovu cenu.

Ve fyzice existuje řada příkladů spontánního narušení symetrie. Jeden z nejznámějších se týká magnetismu. Při vysokých teplotách jsou spiny elektronů ve ferromagnetické látce orientovány náhodně. Při poklesu teploty pod kritickou mez se však spiny elektronů společně orientují do určitého směru, protože tato orientace odpovídá nižšímu stavu energie (základnímu stavu). Lagrangián sice dodržuje rotační symetrii, avšak základní stav energie nikoliv. Stejná situace se objevuje v Higgsově mechanismu s tím rozdílem, že rotace se uvažuje v jistém abstraktním (fázovém) prostoru.

5 Standardní kosmologický model

Asi 10^{-9} sekundy po velkém třesku, když poloměr vesmíru (ct) byl jen asi 30 cm, došlo k **prvnímu fázovému přechodu** (QED), podobnému tomu, k němuž dochází ve ferromagnetické látce při jejím ochlazení pod kritickou teplotu. Vesmír byl v té době velmi horký a suprahustý s teplotou asi 100 GeV. Efektivní hmotnost částic závisela pouze na vlastnostech prostředí. Při ochlazení vesmíru pod kritickou teplotu druhá mocnina efektivní hmotnosti skalárních částic začala být záporná, což vedlo ke spontánnímu narušení elektroslabé symetrie. V tomto okamžiku kalibrační bosony $W^{\pm}$ a Z^0, leptony a kvarky získaly hmotnost. Teplota vesmíru rychle klesala s druhou mocninou stáří vesmíru. Když bylo stáří vesmíru asi 10^{-6} sekundy a jeho poloměr byl několik kilometrů, teplota vesmíru klesla pod 1 GeV a došlo k rozpadu všech kalibračních bosonů $W^{\pm}$ a Z^0 a těžkých kvarků a leptonů na lehčí částice. V tomto okamžiku došlo ke **druhému fázovému přechodu** (QCD), při němž byly uvězněny lehčí kvarky "up" a "down" v hadronech (baryonech jako jsou proton a neutron a v mesonech). Srážky těžkých iontů ve srážkových urychlovačích slouží k vytvoření stavu hmoty před tímto fázovým přechodem.

[5] Podrobněji viz Přílohy (Kalibrační invariance. Princip nejmenší akce. Věty Noetherové)

Když bylo stáří vesmíru několik minut (10^2 sekund), teplota vesmíru klesla na několik MeV, což je typická vazebná energie atomových jader. V tomto období začala vznikat jádra atomů vodíku, hélia a dalších lehkých prvků. Asi 10^5 let po velkém třesku teplota poklesla na několik eV, což je typická vazebná energie atomů. V tomto období došlo k zachycení elektronů atomovými jádry a ke vzniku neutrálních atomů. Proto se hmota oddělila od záření a vesmír se stal průhledným. Na hmotové částice působila přitažlivá gravitační interakce a začaly vznikat první hvězdy, hvězdokupy a galaxie. Stáří vesmíru se odhaduje na asi 15 miliard let a jeho teplota je asi $2,7$ Kelvinů (1 eV = 12000 K).

Podle nové studie však velké galaxie vznikly překvapivě krátce po velkém třesku. Asi bychom očekávali, že počet nejvzdálenějších a nejdříve vzniklých galaxií bude v souladu s množstvím menších, teplejších a namodralejších galaxií v důsledku vzájemných srážek a splývání. Avšak pozorování provedená zrcadlovým dalekohledem o průměru 8 metrů v observatoři Gemini na Havajských ostrovech naznačují, že relativně krátce po velkém třesku byl vesmír vyplněn velkými načervenalými a v podstatě eliptickými galaxiemi.

Pozorování potvrzují 3 miliardy let staré galaxie ve vesmíru jen 4 miliardy let po velkém třesku. Na vznik velkých eliptických galaxií proto bylo velmi málo času. Navíc pozorování potvrzují, že v těchto galaxiích se nachází značné množství těžších atomů, které vznikají v nitrech hvězd termonukleárními reakcemi a do mezihvězdného prostoru se dostávají až erupcemi supernov. Pozorování tedy vyvolávají znepokojivou kosmologickou otázku: jak mohlo být ve vesmíru tolik starých hvězd tak brzy po jeho vzniku? [5]

Velkorozměrné struktury v mladém vesmíru jsou také větší, než se původně očekávalo. Podobně jako přítomnost překvapivě brzy vyspělých galaxií s rudým posuvem kolem 2,00 tento objev naznačuje, že standardní kosmologický model (přinejmenším část týkající se vzniku galaxií) bude vyžadovat revizi. Bylo pozorováno 37 galaxií s rudým posuvem téměř 2,38 rozprostřených v oblasti o průměru 300 miliónů světelných let. Dosud jde o největší pozorovanou strukturu ve vzdáleném vesmíru. Podle modelů, které simulují, jak horká hmota v mladém vesmíru vytvářela síť shluků a filamentů (vláken), taková velká struktura nemohla vzniknout tak rychle.

S pravděpodobností 0,999 lze tvrdit, že pozorovaný vzorek jasných galaxií (slabší galaxie nebyly pozorovány) tvoří skutečně koherentní strukturu a není pouze náhodným shlukem. K tomuto výsledku se dospělo pozorováním nikoliv určitého uspořádání galaxií, ale pozorováním velikosti prázdného prostoru mezi galaxiemi. [5]

6 Problém hierarchie (supersymetrie)

S vysvětlením hmotnosti částic Higgsovým mechanismem se objevuje další problém, označovaný jako problém hierarchie. Jak se udržuje hmotnost Higgsova bosonu v rozsahu hmotností kalibračních bosonů $W^{\pm}$ a Z^0, tedy v řádu několika stovek GeV? Hmotnost této skalární částice má kvadraticky divergentní kvantovou korekci na rozdíl od hmotností kalibračních bosonů, protože není zachovávána žádnou symetrií (invariancí). Kvůli Heisenbergovu principu neurčitosti vakuum v kvantové mechanice není prázdné, ale obsahuje neomezené množství energie a hmoty. Proto by hmotnost skalární částice mohla být neomezená (nebo velmi vysoká). Jak se však dostala na úroveň kalibračních bosonů $W^{\pm}$ a Z^0?

Jak již víme, skutečnost, že skalární hmotnost není zachovávána žádnou symetrií, umožnila vektorovým bosonům a fermionům získat hmotnost Higgsovým mechanismem. Problém hierarchie se objevuje jako druhá strana téže mince. Nejpřitažlivějším řešením je nalézt nějakou symetrii - supersymetrii (SUSY) mezi fermiony a bosony. Podle supersymetrického modelu ke každému fermionu standardního modelu existuje supersymetrický boson a naopak. Superpartneři jsou v následující tabulce vyznačeny vlnovkou. Existence těchto superpartnerů zajišťuje zrušení divergentních kvantových korekcí.

kvarky, leptony	S	kalibrační bosony	S	Higgsovy bosony	S	R-parita
q, l	1/2	γ, g, W, Z	1	h	0	+1
$\tilde{q}, \tilde{l}$	0	$\tilde{\gamma}, \tilde{g}, \tilde{W}, \tilde{Z}$	1/2	$\tilde{h}$	1/2	−1

Standardní částice jsou rozlišeny od supersymetrických částic multiplikativním kvantovým číslem označovaným jako R-parita, která nabývá hodnot +1 pro částice a −1 pro superčástice. Proto supersymetrické částice by měly vznikat v párech a nejlehčí supersymetrické částice by měly být kvůli zachování R-parity stabilní. Ve většině supersymetrických modelů takovou nejlehčí supersymetrickou částicí je fotino $\tilde{\gamma}$ nebo obecná kvantová superpozice $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{Z}$ s hmotností asi 100 GeV. Tato superčástice pouze slabě interaguje s hmotou a proto ji lze obtížně detekovat podobně jako neutrino. Někteří fyzikové jsou přesvědčeni, že nejlehčí supersymetrické částice mohou tvořit neviditelnou nebo temnou hmotu ve vesmíru.

7 Neviditelná (temná) hmota ve vesmíru

Existuje řada nepřímých důkazů, že značná část hmoty ve vesmíru je neviditelná nebo temná hmota. Tato neviditelná hmota se projevuje gravitační interakcí avšak vůbec se neprojevuje elektromagnetickou interakcí. Nejsilnější nepřímý důkaz vychází z rychlosti rotace osamocených hvězd nebo vodíkových mračen v galaktickém halu kolem galaktického jádra. Aby byla zachována rovnováha mezi odstředivým a gravitačním zrychlením, musí být tato rychlost dána vztahem

$$\frac{v_{rot}^2}{r} = \frac{G_N M(r)}{r^2} \qquad \text{tj. } v_{rot} = \sqrt{\frac{G_N M(r)}{r}}$$

kde r je vzdálenost dráhy hvězdy od galaktického jádra a $M(r)$ je celková hmotnost hmoty galaxie uvnitř koule o tomto poloměru. Pokud by kromě viditelného disku galaxie v ní neexistovala žádná hmota, pak by oběžná rychlost hvězd kolem galaktického jádra klesala úměrně $1/\sqrt{r}$. Pozorované oběžné rychlosti hvězd a vodíkových mračen asi v tisíci galaxií včetně naší Galaxie však tímto způsobem neklesají. Proto existuje silná domněnka, že v galaxiích existuje kromě svítící hmoty také neviditelná hmota.

Neviditelnou hmotou samozřejmě mohou být nesvítící tělesa jako jsou malé hvězdy nebo velké planety typu Jupiter. Avšak tyto objekty lze spíše považovat spíše za temnou než neviditelnou hmotu. Tyto objekty se často projevují jako gravitační čočky. Podle obecné teorie relativity se procházející světlo od vzdálených svítících objektů kolem nich ohýbá kvůli lokálnímu zakřivení prostoročasu. Je zřejmé, že tyto kompaktní objekty nemohou být hlavním zdrojem neviditelné hmoty, protože jich pozorujeme jen málo. Příspěvek od nesvítícího plynu a prachu je také velmi malý. Neviditelnou hmotou by v principu mohla být neutrina. Jejich hmotnost je však příliš malá pro požadovanou hustotu neviditelné hmoty. Hlavním kandidátem na neviditelnou hmotu proto jsou nejlehčí supersymetrické částice, které slabě interagují s hmotou avšak nesou hmotnost asi 100 GeV. Tyto částice byly v tepelné rovnováze s kalibračními bosony $W^\pm$ a Z^0, Higgsovými bosony, kvarky a leptony v době, kdy vesmír měl teplotu asi 100 GeV. Když teplota vesmíru poklesla o několik řádů, hustota nejlehčích supersymetrických částic poklesla až na úroveň, kdy rozpínání vesmíru zabránilo jejich další anihilaci. Tyto částice se od sebe natolik vzdálily, že již nemohly navzájem anihilovat. Od té doby celkové množství nejlehčích supersymetrických částic ve vesmíru zůstalo téměř stejné.

Tento scénář předpovídá hustotu neviditelné hmoty, jíž dnes pozorujeme.

Neviditelná hmota zřejmě hrála rozhodující roli při vzniku galaxií. Elektricky neutrální supersymetrické částice podléhaly gravitační interakci dlouho předtím, než vznikly první elektricky neutrální atomy běžné hmoty. První shluky neviditelné hmoty proto mohly vznikat již v době, kdy teprve vznikaly první neutrální atomy, které se později shlukovaly do hvězd, hvězdokup a galaxií. Tento scénář podporují také současná pozorování.

Neviditelná hmota je proto velmi důležitou složkou vesmíru. Dnes se vynakládá značné experimentální úsilí, aby byla neviditelná hmota detekována. Při experimentech hluboko pod zemí se používají velmi přesné detektory, které zaznamenávají interakce částic neviditelné hmoty s běžnou hmotou měřením odrazové energie cílových jader. V Antarktidě se plánuje vybudování neutrinového dalekohledu o ploše kilometru čtverečného, který by měl detekovat neutrina s vysokou energií pocházející z anihilace neviditelných částic ve vesmíru, z nichž značná část by měla být gravitačně zachycena v jádru Slunce. V rámci mezinárodní spolupráce se nedaleko Ženevy ve Švýcarsku buduje kruhový srážkový urychlovač protonů o délce oblouku asi 27 kilometrů. Tento urychlovač by měl produkovat částice, které existovaly při vysokých teplotách a energiích několik nanosekund po velkém třesku. Očekává se, že by v tomto urychlovači měl být objeven Higgsův boson a také nejlehčí supersymetrické částice. Těmito objevy by se konečně vyřešila záhada neviditelné hmoty ve vesmíru a otázka, jak veškerá viditelná hmota ve vesmíru získala hmotnost.

8 Přílohy

8.1 Kalibrační invariance

Označme $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ množinu pozorovatelných veličin nějakého fyzikálního systému, jako je např. částice nebo soubor částic. Tyto veličiny budeme chápat jako n-rozměrný vektor $\mathbf{q}$ v nějakém q-prostoru. Souřadnice prostoru a času jsou zde chápány jako jakékoliv jiné pozorovatelné veličiny. Proto každý vektor $\mathbf{q}$ lze chápat jako určitý soubor měření daného systému. Podle zobecněného principu kovariance fyzikální zákon musí mít stejný tvar pro libovolný počátek nebo orientaci vektoru $\mathbf{q}$, tedy nesmí záviset na volbě soustavy souřadnic.

Fyzikální zákon lze obecně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) \ = \ 0 \tag{6}$$

kde $\mathbf{f}$ je vektor v jiném mnohorozměrném prostoru, který nazveme f-prostorem. Příkladem vektorů v f-prostoru jsou například stavové vektory v kvantové mechanice. V f-prostoru si můžeme také představit soustavu souřadnic. Rozšířený princip kovariance požaduje, aby fyzikální zákony nezávisely na orientaci vektoru $\mathbf{f}$ v f-prostoru. Tento princip se obecně nazývá **kalibrační invariance (symetrie)**.

8.2 Lieovy grupy a maticové grupy

Je-li $A \neq \emptyset$, pak libovolné zobrazení $f: \ A \times A \to A$ se nazývá **binární operace** na množině A. Binární operace každé uspořádané dvojici $(x, y) \in A \times A$ přiřazuje prvek $a \in A$. Obvykle pak píšeme:

$$f(x,y) \ = \ x \cdot y \ = \ a \qquad f(x,y) \ = \ x + y \ = \ a$$

Místo o binární operaci pak hovoříme o součinu resp. součtu prvků.

• **Definice:**

Nechť $G \neq \emptyset$ a nechť je definována binární operace násobení, pro níž platí:
1.

$$\forall\, g_1, g_2, g_3 \in G: \; g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \;=\; (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \qquad \textit{asociativní zákon}$$

2.

$$\exists\, e \in G: \; \forall\, g \in G: \; g \cdot e \;=\; e \cdot g \;=\; g \qquad \textit{existence neutrálního prvku}$$

3.

$$\forall\, g \in G: \; \exists\, g^{-1} \in G: \; g \cdot g^{-1} \;=\; g^{-1} \cdot g \;=\; e \qquad \textit{existence inverzních prvků}$$

Množina G s operací násobení, která splňuje vlastnosti $1, 2, 3$ nazývá **grupa**. Jestliže navíc platí:
4.

$$\forall\, g_1, g_2 \in G: \; g_1 \cdot g_2 \;=\; g_2 \cdot g_1 \qquad \textit{komutativní zákon}$$

pak se množina G s operací násobení, která splňuje vlastnosti $1, 2, 3$ a 4, nazývá **Abelova grupa (komutativní, abelovská grupa).**

Počet prvků grupy G se nazývá **řád grupy**. Grupa konečného řádu se nazývá **konečná grupa**. Jinak se nazývá **nekonečná grupa**.

Nekonečné grupy mohou být diskrétní nebo spojité. Pokud lze každému prvku grupy G přiřadit přirozené číslo, pak se grupa G nazývá **diskrétní**. V opačném případě se grupa G nazývá **spojitá**.

Prvky obecné spojité grupy lze parametrizovat množinou spojitých reálných parametrů

$$g \;=\; g(\lambda) \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Pokud množina spojitých parametrů je konečná (tj. $n \in \mathcal{N}$), pak se spojitá grupa nazývá **konečně rozměrná**. Počet parametrů n se pak nazývá **dimenze grupy**. Pokud je množina spojitých parametrů nekonečná, pak se spojitá grupa nazývá **nekonečně rozměrná**.

Jestliže parametry $f^k(\lambda, \mu)$, $f = (f^1, f^2, \ldots)$, součinu dvou prvků spojité grupy

$$g(\lambda) \cdot g(\mu) \;=\; g(f(\lambda, \mu)) \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots), \; \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$$

jsou analytické funkce všech svých argumentů (tj. funkce $f^k(\lambda, \mu)$ mají derivace všech řádů ve všech svých argumentech) a parametry $\bar{\lambda}_i(\lambda)$ inverzního prvku $g(\bar{\lambda}) = g^{-1}(\lambda)$ jsou analytické funkce všech parametrů λ_i, pak se spojitá grupa G nazývá **Lieova grupa**.

Spojité parametry λ_i se nazývají **souřadnice** na Lieově grupě. Pro konečně rozměrnou Lieovu grupu G souřadnice λ_i vymezují jistou oblast v euklidovském prostoru $\mathcal{R}^n$, kde n je dimenze grupy. Pokud je tato oblast souřadnic omezená nebo kompaktní (tj. $|\lambda_k| < +\infty$, pak se grupa nazývá **kompaktní**.

Křivkou (dráhou) $g = g(\tau)$, $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ na Lieově grupě se nazývá zobrazení

$$\tau \in \langle 0, 1 \rangle \;\to\; g(\tau) \in G$$

Jednoparametrická podmnožina $\{g(\tau)\}$ Lieovy grupy G se také nazývá **křivka**.

Nechť G a G' jsou dvě Lieovy grupy. Zobrazení $\phi : G \to G'$, pro které platí

$$\phi(g_1 \cdot g_2) \;=\; \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$$

se nazývá **homomorfismus**.

Množina $M(n,\mathcal{R})$ všech reálných čtvercových matic typu $n \times n$ tvoří Abelovu Lieovu grupu vzhledem k součtu matic. Množina $M(n,\mathcal{R})$ však obecně netvoří Lieovu grupu vzhledem k součinu matic, protože existují singulární matice, které nemají k sobě inverzní matici. Dimenze Lieovy grupy $M(n,\mathcal{R})$ je rovna počtu prvků matic, tj. $\dim M(n,\mathcal{R}) = n^2$.

Množina všech reálných *regulárních* matic (k nimž existují inverzní matice)

$$GL(n,\mathcal{R}) \;=\; \{A \in M(n,\mathcal{R}) : \; \det A \neq 0\}$$

tvoří **obecnou lineární Lieovu grupu** (GL = *General Linear*) vzhledem k součinu matic. Množina všech reálných *regulárních* matic s kladným determinantem

$$GL_+(n,\mathcal{R}) \;=\; \{A \in GL(n,\mathcal{R}) : \; \det A > 0\}$$

tvoří podgrupu grupy $GL(n,\mathcal{R})$. Dimenze těchto grup je rovna

$$\dim GL(n,\mathcal{R}) \;=\; \dim GL_+(n,\mathcal{R}) \;=\; n^2$$

Speciální lineární grupa $SL(n,\mathcal{R})$ (SL = *special linear*) je podgrupa grupy $GL(n,\mathcal{R})$, pro níž platí

$$SL(n,\mathcal{R}) \;=\; \{A \in GL(n,\mathcal{R}) : \; \det A = 1\}$$

Dimenze této grupy je rovna

$$\dim SL(n,\mathcal{R}) \;=\; n^2 - 1$$

Reálná ortogonální grupa $O(n)$ je podgrupa grupy $GL(n,\mathcal{R}$, pro níž platí

$$O(n) \;=\; \{A \in GL(n,\mathcal{R}) : \; A^T A = E\}$$

kde E je jednotková matice. Dimenze této grupy je rovna

$$\dim O(n) \;=\; n(n-1)/2$$

Speciální ortogonální grupa $SO(n)$ je podgrupa grupy $O(n)$, pro níž platí

$$SO(n) \;=\; \{A \in O(n) : \det A = 1\}$$

Dimenze této grupy je rovna

$$\dim SO(n) \;=\; \dim O(n) \;=\; n(n-1)/2$$

Komplexní unitární grupa $U(n)$ je podgrupa grupy $GL(n,\mathcal{C}$, pro níž platí

$$U(n) \;=\; \{A \in GL(n,\mathcal{C}) : \; A^\dagger A = E\}$$

kde E je jednotková matice, $A^\dagger = (A^T)^*$, tedy komplexně sdružená matice k transponované matici. Dimenze této grupy je rovna

$$\dim U(n) \;=\; n^2$$

Speciální unitární grupa $SU(n)$ je podgrupa grupy $SO(n)$, pro níž platí

$$SU(n) \;=\; \{A \in U(n) : \det A = 1\}$$

Dimenze této grupy je rovna

$$\dim SU(n) \;=\; n^2 - 1$$

- Grupy $GL(n,\mathcal{C}$, $SL(n,\mathcal{C}$, $SL(n,\mathcal{R}$, $SO(n)$, $SU(n)$ a $U(n)$ jsou souvislé.
- Grupy $SL(n,\mathcal{C}$ a $SU(n)$ jsou jednoduše souvislé.
- Grupa $GL(n,\mathcal{R}$ má dvě souvislé komponenty.
- Grupy $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ a $SU(n)$ jsou kompaktní.

Odstavec byl zpracován podle [4] a [3].

8.3 Princip nejmenší akce

Mechanickým systémem rozumíme jakoukoliv soustavu částic nebo těles. **Zobecněnými souřadnicemi** rozumíme jakékoliv parametry, které popisují pohyb. Tyto souřadnice označujeme

$$\mathbf{q} \;=\; (q_1, q_2, \ldots)$$

Částice se v daném systému nemůže pohybovat libovolně. Říkáme, že v systému existují **vazby**, které jsou popsány vztahy mezi zobecněnými souřadnicemi a okrajovými podmínkami. Celkový počet nezávislých parametrů (zobecněných souřadnic), které zcela popisují systém, se označuje jako **stupeň volnosti systému** f. Pro systém N hmotných bodů s R vazbami platí $f = 3N - R$ a zobecněné souřadnice jsou

$$\mathbf{q} \;=\; (q_1, \ldots, q_f)$$

Konfiguračním f-rozměrným **prostorem** je prostor všech hodnot zobecněných souřadnic daného systému. Každý bod v konfiguračním prostoru popisuje jeden stav (**konfiguraci**) mechanického systému. Časový vývoj konfigurace systému $\mathbf{q}(t)$ se nazývá **trajektorie**.

Délkový element v zobecněných souřadnicích má tvar:

$$dl^2 \;=\; g_{ij} dq_i dq_j$$

kde g_{ij} je metrický tenzor.

Kinetická energie systému v zobecněných souřadnicích je rovna ($\dot{q}$ je derivace podle času):

$$T(q, \dot{q}) \;=\; \frac{1}{2} m \frac{dl^2}{dt^2} \;=\; \frac{1}{2} m g_{ij} \frac{dq_i dq_j}{dt^2} \;=\; \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Speciálně pro kartézské souřadnice platí:

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \;=\; \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

a pro sférické souřadnice platí:

$$T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) \;=\; \frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right\}$$

Podle **Hamiltonova principu** (principu nejmenší akce) je každý mechanický systém charakterizován funkcí

$$\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

nebo krátce $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ ($\dot{q}$ jsou derivace podle času). Pohyb systému splňuje následující podmínku. Předpokládejme, že v okamžicích t_1, t_2 je systém v bodech daných zobecněnými souřadnicemi $q^{(1)}, q^{(2)}$. Pak se systém mezi těmito body pohybuje po takové trajektorii, že integrál

$$S \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\; dt \tag{7}$$

je minimální. Funkce $\mathcal{L}$ se nazývá **Lagrangián** a výše integrál (7) se nazývá **akce**. Lagrangeova funkce obsahuje pouze q a $\dot{q}$ a žádné vyšší derivace. Mechanický stav je úplně definován pouze souřadnicemi a rychlostmi (derivacemi souřadnic).

Nyní sestavíme diferenciální rovnice, pomocí nichž určíme minimum integrálu (7). Pro jednoduchost předpokládejme, že systém má pouze jeden stupeň volnosti. Proto hledáme jedinou funkci $q(t)$. Předpokládejme, že $q = q(t)$ je funkce, pro něž S je minimální. Funkce S poroste, pokud funkci $q(t)$ nahradíme funkcí

$$q(t) + \delta q(t) \tag{8}$$

kde $\delta q(t)$ je malá funkce na intervalu t_1, t_2 (tato funkce se nazývá **variace funkce**).

V bodech t_1 a t_2 všechny funkce (8) nabývají stejných hodnot $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, proto máme:

$$\delta q(t_1) \;=\; \delta q(t_2) \;=\; 0 \tag{9}$$

Změna S při záměně funkce $q(t)$ za funkci $q + \delta q$ je dána vztahem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\; dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\; dt$$

Rozvoj tohoto rozdílu v nekonečnou řadu v členech q a $\dot{q}$ začíná členy prvního řádu. Nutnou podmínkou minima (obecně extrému) pro S je, aby se všechny členy této řady blížily k nule. Proto lze **princip nejmenší akce** zapsat ve tvaru

$$\delta S \;=\; \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\; dt \;=\; 0 \tag{10}$$

nebo pomocí variace:

$$\delta S \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\; dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right)\; dt \;=\; 0$$

Použijeme vztah

$$\delta \dot{q} \;=\; \frac{d}{dt}\delta q$$

a provedeme integraci per partes druhého členu. Dostaneme:

$$\delta S \;=\; \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\; dt \;=\; 0 \tag{11}$$

Vzhledem k podmínce (9) první člen na pravé straně výrazu (11) je nulový. Ve výrazu zůstane pouze integrál, který musí být roven nule pro všechny hodnoty δq, tedy integrand musí být roven nule. Proto dostáváme diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \;=\; 0 \tag{12}$$

Pro více stupňů volnosti se různé funkce $q_i(t)$ mění nezávisle na sobě. Proto lze výše uvedenou diferenciální rovnici zapsat pro každou funkci zvlášť ve tvaru:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \ = \ 0 \qquad i = 1, \ldots, s \tag{13}$$

V teoretické mechanice se výše uvedené diferenciální rovnice nazývají **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice**. Jestliže je Lagrangián daného mechanického systému znám, pak rovnice (13) popisuje vztah mezi zrychleními, rychlostmi a souřadnicemi, tedy rovnice pohybu. Z matematického hlediska rovnice (13) představují soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $q_i(t)$. Obecné řešení této soustavy obsahuje $2s$ konstant. Jejich určením se úplně definuje pohyb mechanického systému. K tomu je nutné zadat počáteční (okrajové) podmínky, které popisují systém v daném okamžiku (například počáteční souřadnice a rychlosti).

Lagrangeovy rovnice je nutné doplnit o počáteční podmínky:

$$q_i(t_0) \ = \ q_{i0}$$
$$\dot{q}_i(t_0) \ = \ \dot{q}_{i0}$$

Lagrangeovu funkci nelze určit jednoznačně. Dvě funkce se mohou odlišovat o některé funkce zobecněných souřadnic a rychlostí a přitom vedou ke stejným rovnicím.

Volba Lagrangeovy funkce patří mezi základní axiomy každé fyzikální teorie. Zpravidla se za tuto funkci volí skalární funkce, jejíž hodnota nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Pro jednoduché mechanické systémy existují dvě důležité skalární funkce: kinetická a potenciální energie. V případě klasického mechanického systému následující lineární kombinace těchto funkcí vede ke správným pohybovým rovnicím:

$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \ = \ T(q, \dot{q}) - V(t, q)$$

Pro složitější systémy je rozdělení Lagrangeovy funkce na kinetickou a potenciální energie značně obtížné a zbytečné.

Uvažujme nyní jako jednoduchý příklad pohyb hmotného bodu v potenciálním poli $V(x, y, z)$. Hmotný bod má tři stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice položíme:

$$q_1 \ = \ x, q_2 \ = \ y, q_3 \ = \ z,$$

Kinetická energie je rovna:

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \ = \ \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} \ = \ \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Lagrangián má tvar:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \ = \ T - V \ = \ \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z)$$

Příslušné Eulerovy-Lagrangeovy mají tvar (pro souřadnici x):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \ = \ 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} \ = \ 0 \qquad \text{tj.} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} \ = \ -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Celkem dostáváme:

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \ = \ \mathbf{F} \qquad \mathbf{F} \ = \ -\nabla V$$

Odstavec byl zpracován podle [2].

8.4 Věty Noetherové

Německá matematička **Emmy Noether** (narozena 23. března 1882 v Erlangenu, zemřela 14. dubna 1935 v Bryn Mawr) ve svém článku *"Invariante Variationsprobleme" (Nachr. d. König. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918), 235-257)* ukázala, že zákony zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti plynou ze symetrie prostoru a času. Připomeňme, že tyto symetrie (invariance) lze popsat spojitými *Lieovými grupami*.

Emmy Noether obecně ukázala, že s každou symetrií (invariancí) přírodního jevu souvisí nějaká zachovávající se fyzikální veličina. Tato veličina je danou symetrií definována a zachovává se pouze tehdy, pokud výchozí symetrie platí.

Předpokládejme, že Lagrangeova funkce nezávisí na některé zobecněné souřadnici, např. q_k. Tedy platí:

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}(t, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f) \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \;=\; 0 \tag{14}$$

Zobecněná souřadnice, která se v Lagrangeově funkci nevyskytuje, se nazývá **cyklická souřadnice**. Na této souřadnici nebudou záviset pohybové rovnice a tedy ani výsledky experimentů. Situace je symetrická vůči **prostorové translaci** v zobecněné souřadnici. Z pohybové rovnice pro tuto souřadnici dostáváme:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \;=\; \text{konst.} \tag{15}$$

Zobecněnou hybností odpovídající zobecněné souřadnici q_k nazveme

$$p_k \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \qquad k = 1, \ldots, f \tag{16}$$

Tato veličina se zachovává, pokud je zobecněná souřadnice q_k cyklická (nevyskytuje se v Lagrangeově funkci $\mathcal{L}$), tedy fyzikální jev je symetrický (invariantní) vůči prostorové translaci v zobecněné souřadnici q_k.

Předpokládejme, že Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase t, tj.

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \;=\; 0 \tag{17}$$

Situace je symetrická vůči časové translaci. Nalezneme úplnou časovou derivaci Lagrangeovy funkce:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \;+\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k \;+\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \tag{18}$$

Protože podle předpokladu je první člen na pravé straně uvedeného vztahu nulový, vyjádříme $\partial\mathcal{L}/\partial q_k$ pomocí Lagrangeovy rovnice (13)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \;=\; 0 \qquad i = 1, \ldots, s$$

a pro vztah (18) dostaneme

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \;=\; \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k \;+\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \tag{19}$$

a podle vztahu pro derivaci součinu funkcí máme:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \; = \; \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) \tag{20}$$

Po převedení na jednu stranu rovnosti dostáváme:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathcal{L}\right) \; = \; 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathcal{L} \; = \; \text{konst.} \tag{21}$$

Zobecněnou energií nazveme

$$E \; = \; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathcal{L} \tag{22}$$

Tato veličina se zachovává, pokud Lagrangeova funkce explicitně nezávisí na čase, tedy fyzikální jev je symetrický (invariantní) vůči časové translaci.

Základní zákony zachování v mechanice jsou přímým důsledkem symetrií prostoročasu, jak ukazuje následující tabulka.

homogenita prostoru	zachování hybnosti
isotropie prostoru	zachování momentu hybnosti
neměnnost v čase	zachování energie

Odstavec byl zpracován podle [2].